正規分布

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L05(2024-05-20 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-20 Mon 06:51 JST hig"

今日の目標

- 岩薩林 確率・統計 §4.5 正規分布の確率密度関数, グラフを書ける．母期待値，確率，分位数を求められる．

L04-Q1

Quiz 解答: 連続型一様分布

1. $\mathrm{E}[X^k] = \frac{1}{d-c}\int_c^d x^k \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\frac{d^{k+1}-c^{k+1}}{d-c} = \frac{1}{k+1}(d^k + d^{k-1}c + \cdots + c^k)$.
2. $\mathrm{E}[X^1] = \frac{c+d}{2}$.
3. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X^1]^2 = \frac{(d-c)^2}{12}$. $\sqrt{\mathrm{V}[X]} = \frac{d-c}{\sqrt{12}} \simeq \frac{d-c}{3.5}$.

L04-Q2

Quiz 解答: 連続型一様分布の応用

1. $X \sim \mathrm{U}(18, 20)$.
2. $\mathrm{E}[X^1] = 19$ [mm].
3. $P(X \geq 15) = \int_{19.5}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{19.5}^{20} \frac{1}{20-18}\mathrm{d} = \frac{1}{4}$.
4. $\mathrm{E}[6X^2] = 2168 \neq 6 \cdot 19^2 = 2166$ [mm^2].
5. $P(6X^2 \leq 2000) = P(X \leq (\frac{2000}{6})^{1/2}) = \int_{19}^{(2000/6)^{1/2}} \frac{1}{20-18}\, \mathrm{d}x = 5\sqrt{10/3} - 9$.

6. $\mathrm{E}[X^3] = 6878 \neq 19^3 = 6859$ [mm^3].

L04-Q3

Quiz 解答: 連続型一様分布

1. $X \sim \mathrm{U}(\sqrt{3}(-\sqrt{3}) + 5, \sqrt{3}(+\sqrt{3}) + 5)$, すなわち，$X \sim \mathrm{U}(2, 8)$. 関数とグラフ略.
2. $\mathrm{E}[X] = \frac{2+8}{2}$, または, $\mathrm{E}[X] = \sqrt{3}\mathrm{E}[Z] + 5 = \sqrt{3} \cdot 0 + 5$.
3. $\mathrm{V}[X] = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$, または, $\mathrm{V}[X] = (\sqrt{3})^2 \mathrm{V}[Z] = 3 \cdot 1$.

確率の計算方法

変換前 $X \sim \mathrm{U}(0,3)$

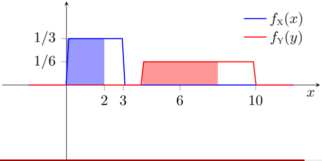
$P(X \leq 2) = ?$

計算方法 1 一様分布だから…

$P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f_{\mathrm{X}}(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (0 \leq x \leq 3) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

x	0	2	3
y	4	8	10



変換後 $Y = 2X + 4$

$P(Y \leq 8) = ?$

計算方法 1 変換後も一様分布になるから…

$Y \sim \mathrm{U}(4,10)$

$P(Y \leq 8) = \int_{-\infty}^{8} f_{\mathrm{Y}}(y)\mathrm{d}y = \int_4^8 \frac{1}{6}\mathrm{d}y = \frac{2}{3}.$

計算方法 2 X の確率で書き直す

$P(Y \leq 8) = P(X \leq 2) = 左 = \frac{2}{3}.$

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & (0 \leq \frac{y-4}{2} \leq 3) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

ここまで来たよ

4. 連続型一様分布・確率変数の変数変換・標準化

5. 正規分布
   - 標準正規分布
   - 一般の正規分布

標準正規分布 standard normal distribution $\mathrm{N}(0,1^2)$ の性質

定義 (標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ 岩薩林 確率・統計 (4.17))

次の確率密度関数 を持つ確率変数 Z を，標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1^2)$ にしたがうという．

$$f_{\mathrm{Z}}(z)=\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}.$$

累積分布関数

$$F_{\mathrm{Z}}(z)=\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\phi(z')\mathrm{d}z'.$$

ϕ,Φ は f,F のギリシャ文字．あまりに有名分布なので専用文字を使う．
$\Phi(z)$ の積分は具体的に書けない．
Python で `scipy.stats.norm(loc=0,scale=1)`，
Excel で`=norm.s.dist(z,FALSE)`

標準正規分布 $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ の母期待値

k 次のモーメント (k: 自然数)

$$\mathrm{E}[Z^{2k-1}] = 0, \quad \text{奇関数}$$

$$\mathrm{E}[Z^{2k}] = (2k-1)!!$$

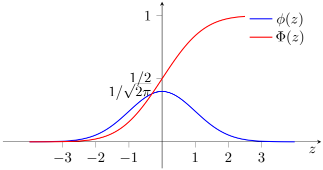
$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)$$ 部分積分

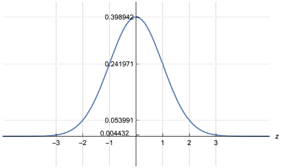
全確率 $\mathrm{E}[Z^0] = 1$, 岩薩林 確率・統計 (4.19) 微積分 II

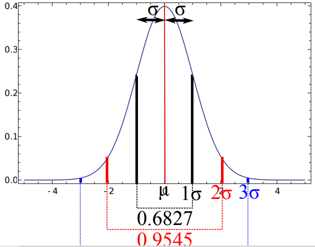
母平均値 $\mathrm{E}[Z] = 0$, 岩薩林 確率・統計 (4.20)

母分散 $\mathrm{V}[Z] = 1$ 岩薩林 確率・統計 (4.21)

たしかに, Z は標準化された確率変数. Google Colab Python による正規分布 LearnMoodle







標準正規分布の確率と $\Phi(z)$ の数値

$Z \sim \mathrm{N}(0,1^2)$ のとき, 岩薩林 確率・統計 (4.22)

$$P(c < Z \leq d) = \int_c^d \phi(z')\,\mathrm{d}z' = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}\,\mathrm{d}z' = \Phi(d) - \Phi(c).$$

$\Phi(z)$ を scipy.stats.norm().cdf(z) や数表 岩薩林 確率・統計 付表 1(p.227) から求める. 分位数関数 $\Phi^{-1}(q)$ も Python や数表 岩薩林 確率・統計 付表 1(p.227) に頼る.

```
rvz=stats.norm(loc=0,scale=1) # Z ~ N(0,1^2)
rvz.cdf(d) # Φ(d)
rvz.ppf(q) # Φ^{-1}(q)
```

注: つねに $\Phi(-\infty) = 0, \Phi(+\infty) = 1$. 標準正規分布は確率密度関数が偶関数なので $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$. 特に $\Phi(0) = 1/2$.
岩薩林 確率・統計 付表 1 には $I(z) = \Phi(z) - \frac{1}{2}, z > 0$ の表が載っている. 高校 数学 B
$z < 0$ については, $I(-z) = -I(z)$ を経由して求める.
上側確率 $Q(z) = P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$ の表を載せてる教科書も多い.

L05-Q1

Quiz(標準正規分布の確率)

Z は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数である．

1. 確率 $P(Z \leq 1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう．Python または表で小数として求めよう．
2. 確率 $P(-0.56 < Z \leq +1.23)$ を累積分布関数 $\Phi(z)$ で表そう．Python または表で求めよう．
3. 確率 $P(Z > d) = 0.025$ となる d を累積分布関数 $\Phi(z)$ の逆関数で表そう．Python または表で求めよう．

岩薩林 確率・統計 例題 4.9(p.91)，問題 8(p.92)，問題 10(p.96)

ここまで来たよ

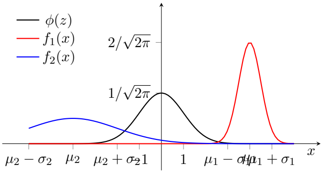
4 連続型一様分布・確率変数の変数変換・標準化

5 正規分布
- 標準正規分布
- 一般の正規分布

一般の正規分布 $\mathrm{N}(b, a^2)$

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ に対して，$X = aZ + b$ を考える．

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X^0] &= 1, \\ \mu = \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[aZ+b] = b, \\ \sigma^2 = \mathrm{V}[X] &= \mathrm{V}[aZ+b] = a^2, \end{aligned}$$



$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \rightsquigarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$$

定義 (一般の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$)

次の確率密度関数を持つ確率変数 X を，母平均値 μ, 母分散 σ^2 の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (normal distribution) にしたがうという．

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

L05-Q2

Quiz(正規分布の確率)

連続型確率変数 X は, 確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 3^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-4)^2}{2\cdot 3^2}}$$

にしたがう.

1. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. $f(x)$ のグラフを, 標準正規分布の確率密度関数と重ねて描こう.

Python でも描いてみよう.

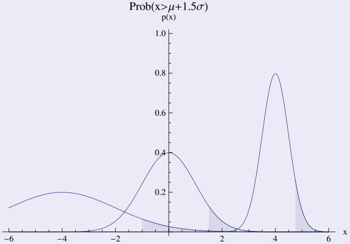
一般の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率

命題 (変数変換前後の確率は同じ)

確率は変数変換，特に標準化 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ の前後で変わらない.

斜線部の面積はどれも同じ

$$
\begin{aligned}
P(c < X \le d) &= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{d-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} < Z \le \frac{d-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$



変数				下限	上限	母平均値	母分散
z	-1	0	1	$\frac{c-\mu}{\sigma}$	$\frac{d-\mu}{\sigma}$	0	1^2
x	$\mu-\sigma$	μ	$\mu+\sigma$	c	d	μ	σ^2

変数変換しても確率が同じことの別説明 (置換積分)

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ のとき, 積分で $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\mathrm{d}z = \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}x$ とすると,

$$
\begin{aligned}
P(c < X \leq d) &= \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\, \sigma \mathrm{d}z \\
&= P\left(\frac{c-\mu}{\sigma} < Z \leq \frac{d-\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

L05-Q3

Quiz(正規分布の確率)

確率変数 $X \sim \mathrm{N}(3, 2^2)$, $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ とする.

1. X, Z の確率密度関数の式を書こう. グラフを重ねて描こう.
2. 母期待値 $\mathrm{E}[X^2]$ を求めよう.
3. 確率 $P(X > 5) = P(c < Z \leq d)$ となるように c,d を定めよう. また, 確率を Python や表を使って小数で求めよう.
4. 確率 $P(+1 < X \leq 7) = P(c \leq Z \leq d)$ となるように c,d を定めよう. また, 確率を Python や表を使って小数で求めよう.
5. 確率 $P(+3 < X \leq 9) = P(c \leq Z \leq d)$ となるように c,d を定めよう. また, 確率を Python や表を使って小数で求めよう.
6. 確率 $P(X \leq d) = 3/4$ となる d を, 確率 $P(Z \leq d') = 3/4$ となるような d' で表そう. また, Python や表を使って小数で求めよう.

岩薩林 確率・統計 §4.5 例題 4.10,4.11, 問題 10, 第 4 章練習問題 5