第7回 量子力学I演習 の訂正とおわび

樋口 さぶろお*

1999年12月8日

前回の量子力学I演習の黒板での説明に誤りがありました.

系が, (必ずしも規格化されていない) ket $|\psi\rangle$ で現される状態にあるとき, 物理量 A を測定した結果, 演算子 $\hat{A}$ の固有値 a を得る確率は,

$$P(a) = \frac{|\langle a|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

です. ただし $|a\rangle$ は, 縮退していない固有値 a に対応する, 規格化された固有状態. おわびして訂正します.

この結果, 7.1,7.2 の答えは次のようになります. (これらの問も, レポートとして提出可能です).

なお, この紙は, 16-809B の前と`http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1/`で配布しています.

7.1 2つの状態を持つ量子力学系

解答

1. Spin の z-成分を測定して得られる可能性のある値は, 演算子 S_z の固有値 $\lambda_\pm = \pm\frac{\hbar}{2}$. なお, これに対応する固有状態は $|\phi_+\rangle = \binom{1}{0}, |\phi_-\rangle = \binom{0}{1}$.

2. 状態 $|\psi\rangle$ は

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2i\\1\end{pmatrix} = \frac{2i}{\sqrt{5}}|\phi_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_-\rangle \tag{7.1}$$

と展開されるので, 確率 $\frac{|\langle\phi_+|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|2i/\sqrt{5}|^2}{1} = \frac{4}{5}$ で $+\frac{\hbar}{2}$, 確率 $\frac{|\langle\phi_-|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|1/\sqrt{5}|^2}{1} = \frac{1}{5}$ で $-\frac{\hbar}{2}$ が得られる.

3. 期待値は $+\frac{\hbar}{2}\times\frac{4}{5} + (-\frac{\hbar}{2})\times\frac{1}{5} = \frac{3}{10}\hbar$.

*`hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場16号館809B, でんわ: (03)5454.6735

7.2 離散固有値の確率解釈

解答

1. $e^{i\frac{2n\pi}{L}x}$ が周期 L を持つことに注意して,

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \int_0^L dx \psi_n^*(x)\psi_m(x)$$
$$= \int_0^L dx\, A_n^* A_m e^{i\frac{2\pi(m-n)}{L}x} = A_n^* A_m L \delta_{m,n}. \quad (7.2)$$

2. 上の問で, $A_n^* A_n L = |A_n|^2 L = 1$ となればよいから, $A_n = L^{-1/2}$ ととればよい.

3.

$$-\hbar\frac{d}{dx}\psi_n(x) = \frac{2n\pi\hbar}{L}\psi_n(x). \quad (7.3)$$

4.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) = \frac{4n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\psi_n(x). \quad (7.4)$$

5.

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{L}}{2i}|\psi_1\rangle - \frac{\sqrt{L}}{2i}|\psi_{-1}\rangle + \frac{2i\sqrt{L}}{2}|\psi_2\rangle + \frac{2i\sqrt{L}}{2}|\psi_{-2}\rangle \quad (7.5)$$

に注意する. 得られる可能性のある値は $p_n := \frac{2n\pi\hbar}{L}$. 確率は

$$P(p_n) = \frac{|\langle\psi_n|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} = \frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{4}\cdot\delta_{n,1} + \frac{1}{4}\cdot\delta_{n,-1} + 1\cdot\delta_{n,2} + 1\cdot\delta_{n,-2}\right) \quad (7.6)$$

期待値は 0.

6. $\hat{p}^2$ の固有状態は ψ_n で, その固有値は $a_n := \frac{4n^2\pi^2\hbar^2}{L^2}$. $\psi_{\pm n}$ が同じ固有値をとることに注意する. 固有値 $\frac{2^2 1^2\pi^2\hbar^2}{L^2}$ を測定値として得る確率は, 2 つの固有状態 $\psi_{\pm 1}$ からの寄与を加えて,

$$\frac{|\langle\psi_1|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} + \frac{|\langle\psi_{-1}|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} = \frac{|\sqrt{L}/2i|^2}{5L/2} + \frac{|-\sqrt{L}/2i|^2}{5L/2} = \frac{1}{5}. \quad (7.7)$$

同様に, $\frac{2^2\cdot 2^2\pi^2\hbar^2}{L^2}$ を得る確率は, $\psi\pm 2$ からの寄与を加えて,

$$\frac{|\langle\psi_2|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} + \frac{|\langle\psi_{-2}|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} = \frac{|i\sqrt{L}|^2}{5L/2} + \frac{|i\sqrt{L}|^2}{5L/2} = \frac{4}{5}. \quad (7.8)$$

その他の値を得る確率は 0. 期待値は $\frac{17}{5}\frac{4\pi^2\hbar^2}{L^2}$.