第2回　量子力学 I 演習 問題

樋口 さぶろお[1]

1999 年 10 月 25 日

2.1　Fourier 級数展開

問題

次の周期 L の周期関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{2\pi nix/L} \tag{2.1Q.1}$$

と展開した時の f_n を求めよ. なお, 基本周期 $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ だけを下に与える.

$$f(x) = \sin\frac{2\pi x}{L}\sin\frac{4\pi x}{L} \tag{2.1Q.2}$$

$$f(x) = 1 - \left|\frac{2}{L}x\right| \tag{2.1Q.3}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < \frac{L}{4}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.1Q.4}$$

2.2　微分方程式の特解

問題

[1]hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1]この文書の最新版はhttp://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/all.pdf にあるかもしれません.

強制振動の方程式

$$mx''(t)+m\omega_0^2x(t)=mag(t) \tag{2.2Q.1}$$

の特解 $x(t)$ を, Fourier 級数として求めよ. ただし, $g(t)$ は周期 T の関数で, 基本周期 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ で

$$g(t)=\begin{cases}-1 & (-\frac{T}{2}<t<0)\\ +1 & (0<t<\frac{T}{2})\end{cases}. \tag{2.2Q.2}$$

2.3 微分方程式の特解

問題

強制振動の方程式

$$mx''(t)+m\gamma x'(t)+m\omega_0^2x(t)=ma\cos\omega t \tag{2.3Q.1}$$

の特解を, 解 $x(t)$ が

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{1}{\sqrt{2\pi/\omega}}\exp(in\omega t) \tag{2.3Q.2}$$

と展開されると仮定して求めよ.

2.4 Fourier 級数と波動方程式

問題

境界条件 $u(0,t)=u(L,t)=0$ のもとでの波動方程式

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}(x,t)=v^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}(x,t) \tag{2.4Q.1}$$

を考える. 時刻 $t=0$ で,

$$u(x,0)=a\sin\frac{\pi x}{L} \tag{2.4Q.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)=b\sin\frac{2\pi x}{L} \tag{2.4Q.3}$$

だったとする. 任意の時刻での $u(x,t)$ を次の手順で求めよ.

1. まず一般解を求める. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$ と展開できると仮定し, $a_n(t)$ を求めよ.

2. 次に, $u(x,t)$ に対して, $u(x,0)$ での条件を課して, $a_n(t)$ を決定せよ.

2.5 Fourier 変換

問題

次の関数の Fourier 変換を求めよ. ただし, $a, \ell > 0$ は定数.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2.5Q.1}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{2.5Q.2}$$

$$f(x) = e^{-a^2 x^2} \tag{2.5Q.3}$$

Hint. Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-a^2 x^2} = \sqrt{\pi}/a. \tag{2.5Q.4}$$

参考文献

[1] 清水先生の講義ノート http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)

[3] ランダウ, リフシッツ 量子力学 1,2 (東京図書)