第3回　量子力学 I 演習 問題

樋口 さぶろお[1]

1999 年 11 月 1 日

3.1　Fourier 級数 の復習

問題

次の周期 $L = 1$ の関数を Fourier 級数展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1/2) \\ 1 & (1/2 < x < 1) \end{cases} \tag{3.1Q.1}$$

$$f(x) = x \quad (0 < x < 1) \tag{3.1Q.2}$$

3.2　Fourier 変換

問題

[1]hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1]この文書の最新版はhttp://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/all.pdf にあるかもしれません.

次の関数の Fourier 変換を求めよ. ただし, $a, \ell > 0$ は定数.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.2Q.1}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.2Q.2}$$

$$f(x) = e^{-a^2x^2} \tag{3.2Q.3}$$

Hint. Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-a^2x^2} = \sqrt{\pi}/a. \tag{3.2Q.4}$$

3.3 Fourier 変換と波動方程式

問題

無限区間 $-\infty < x < \infty$ で波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{3.3Q.1}$$

を考える. 時刻 $t = 0$ で,

$$u(x,0) = u_0 \exp(-x^2/a^2) \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \tag{3.3Q.2}$$

だったとする. 以後の時刻での $u(x,t)$ を, 次の手順で求めよ.

1. Fourier 積分表示 $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk a(k,t) e^{ikx}$ を代入して, $a(k,t)$ の満たす微分方程式を求める.

2. $u(x,0), \dot{u}(x,0)$ を Fourier 変換して $a(k,0), \dot{a}(k,0)$ を求める.

3. 時間について積分して, $a(k,t)$ を求める.

4. 逆 Fourier 変換で $f(x,t)$ を求める.

3.4 Fourier 変換と波動方程式

問題

無限区間 $-\infty < x < \infty$ で波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \tag{3.4Q.1}$$

を考える. 時刻 $t = 0$ で,

$$u(x,0) = f(x) := \begin{cases} u_0 \times (1 - |x/a|) & (|x| < a), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases} \tag{3.4Q.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = 0 \tag{3.4Q.3}$$

だったとする. 以後の時刻での $u(x,t)$ を, 次の手順で求めよ.

1. Fourier 積分表示 $u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk a(k,t) \mathrm{e}^{ikx}$ を代入して, $a(k,t)$ の満たす微分方程式を求める.
2. $u(x,0), \dot{u}(x,0)$ を Fourier 変換して $a(k,0), \dot{a}(k,0)$ を求める.
3. 時間について積分して, $a(k,t)$ を求める.
4. 逆 Fourier 変換は, 少し面倒なのでしなくてよい.

3.5 波動方程式と初期値問題

問題

上の問題で, $u(x,t)$ を, 次の手順にしたがって求めてみよ.

1. 任意の f_1, f_2 について $f(x,t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt)$ は波動方程式の解なのだった. そこで, ある f_1, f_2 で

   $$u(x,t) = f_1(x + vt) + f_2(x - vt) \tag{3.5Q.1}$$

   とかけると仮定する. 時刻 $t = 0$ での初期条件から, f_1, f_2 を定めよ.
2. 波 $u(x,t)$ の時間変化を描け.

参考文献

[1] 清水先生の講義ノート http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)

[3] ランダウ, リフシッツ 量子力学 1,2 (東京図書)