第6回　量子力学 I 演習 問題

樋口 さぶろお[1]

1999 年 11 月 29 日

6.1　演算子

問題

次の演算子を x の関数 1(恒等関数), x, $\exp kx$ に作用させてみよ. ただし, $a, b \in \mathbb{C}$ は定数. これらが線型演算子であることを納得せよ.

$$f(x) \mapsto (a + b\tfrac{d}{dx}) f(x), \tag{6.1Q.1}$$

$$f(x) \mapsto (a + bx) f(x), \tag{6.1Q.2}$$

$$f(x) \mapsto \int_0^1 dy\, e^{x+y} f(y). \tag{6.1Q.3}$$

また, 次のような演算子は線型でないことを納得せよ. ただし $A \in \mathbb{C}, A \neq 0$.

$$f(x) \mapsto A, \quad f(x) \mapsto f(x) + A, \quad f(x) \mapsto (f(x))^2.$$

6.2　演算子の固有値, 固有関数

問題

[1] hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1] この文書の最新版はhttp://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/ にあるかもしれません.

次の演算子の固有値, 固有関数 $f(x)$ をみつけよ (それですべてであることは示さなくてもよい).

$$-\sqrt{-1}\frac{d}{dx},$$
$$-\frac{d^2}{dx^2},$$
$$-\frac{d^2}{dx^2}+a,$$
$$a = a\times\mathbf{1}, \quad [\mathbf{1} : f(x)\mapsto f(x)]$$
$$x, \qquad [x : f(x)\mapsto x\times f(x)].$$

6.3 固有 vector 展開 (微分方程式)

問題

時刻に依存する vector 変数 $\vec{x}(t) = \binom{x_1(t)}{x_2(t)}$ が, 微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{v}(t) = M\vec{v}(t), \quad \text{ただし} \quad M = \begin{pmatrix} -2 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix}$$

にしたがって時間発展する. 初期条件は

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt}\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

次の手順で解 $\vec{v}(t)$ を求めよ.

1. 行列 M の固有値, (規格直交) 固有 vector $\lambda_i, \vec{v}_i$ を求める.
2. 固有 vector $\vec{v}_i$ を基底として, $\vec{v}(0), \frac{d}{dt}\vec{v}(0)$ をその線型結合としてかく.
3. 固有 vector $\vec{v}_i$ を基底として, 解を
$$\vec{v}(t) = \sum_{j=1,2} a_j(t)\vec{v}_j$$
とかく. このとき, 係数 $a_j(t)$ の従う微分方程式を求め, 解く.
4. 初期条件を満たす解 $\vec{v}(t)$ を求める.

6.4　固有関数展開 (微分方程式)

問題

時刻 t にも依存する x の関数 $f(x;t)$ が, 微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x;t) = A f(x;t)$$

にしたがって時間発展する. ただし, $|x| \to \infty$ で $|f(x)| \to \infty$ とならないような関数だけを考える. ただし, A は演算子 $A = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. ($v$ は定数). 初期条件は

$$f(x;t=0) = \exp(-x^2/a^2), \qquad \frac{\partial}{\partial t} f(x;t=0) = 0.$$

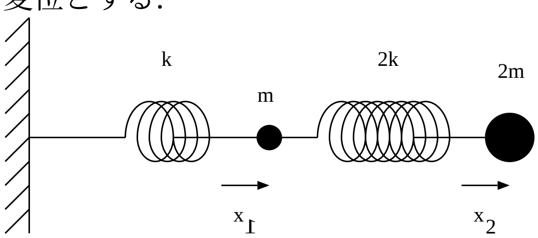
次の手順で解 $f(x;t)$ を求めよ.

1. 演算子 A の固有値, 固有関数 $\{\phi_k(x)\}_{k\in\mathbb{R}}$ を求める.
2. $f(x;t=0), \frac{\partial}{\partial t} f(x;t=0)$ を固有関数 $\phi_k(x)$ の線型結合としてかく.
3. 固有関数 $\phi_k(x)$ を基底として, 解を
$$f(x;t) = \int dk\, F_k(t)\phi_k(x)$$
とかく. このとき, 係数関数 $F_k(t)$ の従う微分方程式を求め, 解く.
4. 初期条件を満たす解 $f(x;t)$ を求める.

6.5　対角化の応用: 連成振動

問題

下のような振動子系で, 振動の一般解を求めよ. ただし, x_i はつりあいの位置からの変位とする.



参考文献

[1] 清水先生の講義ノート http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)

[3] ランダウ, リフシッツ 量子力学 1,2 (東京図書)