第7回　量子力学 I 演習 問題

樋口 さぶろお[1]

1999 年 12 月 6 日

7.1　2つの状態を持つ量子力学系

問題

Spin 1/2 とよばれる系を考える (空間の一点に固定された, しかしその場で回転はできる 矢印型分子のような系を量子化したもの). Hilbert 空間は $H = \mathbb{C}^2$ である.

1. Spin の x, y, z-成分 (矢印の x, y, z-成分) という物理量を表す演算子は

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.1Q.1}$$

   である. Spin の z-成分を測定して得られる可能性のある値は何か.

2. 系が状態 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{2i}{1}$, にあるとする. Spin の z-成分を正確に測定した時, どのような値がどのような確率で得られるか.

3. 系が上の状態にあるとき, Spin の z-成分の期待値を求めよ.

7.2　離散固有値の確率解釈

問題

[1] `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1] この文書の最新版は`http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/` にあるかもしれません.

1 次元空間 $0 < x < L$ で定義された波動関数 $\psi(x)$ で周期的境界条件 $\psi(0) = \psi(L)$ を満たすものの空間を H とかく. H に属する波動関数の族

$$\psi_n(x) = A_n \mathrm{e}^{i\frac{2n\pi}{L}x}(n \in \mathbb{Z}). \tag{7.2Q.1}$$

を考える.

1. この族が直交系であることを示せ.
2. $A_n \in \mathbb{C}$ を適当に定めて, この族が正規直交系になるようにせよ.
3. $\psi_n(x)$ が, 運動量演算子 $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ の固有関数であることを示せ. 固有値を求めよ.
4. $\psi_n(x)$ が, 自由粒子の Hamiltonian $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数であることを示せ. 固有値を求めよ.
5. 規格化されていない, H に属する波動関数

   $$\phi(x) = \sin\frac{2\pi}{L}x + 2\sqrt{-1}\cos\frac{4\pi}{L}x \tag{7.2Q.2}$$

   を考える. 運動量 p を測定したときに, どのような結果がどのような確率で得られるか. 運動量の期待値は何か.
6. $\phi(x)$ を考える. 運動量の 2 乗 p^2 を測定したときに, どのような結果がどのような確率で得られるか. 運動量の 2 乗の期待値は何か. p^2 に対応する演算子は $\hat{p}^2$ である.

7.3 離散状態, 確率解釈

問題

1 次元空間 $0 < x < L$ の波動関数 $\psi(x)$ で, 固定端の条件 $\psi(0) = \psi(L) = 0$ を満たすものからなる空間を H とかく.

1. 空間 H のなかで, 演算子 (自由粒子の Hamiltonian) $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数とその固有値をすべて求めよ.
2. それを規格化し, 正規直交系にせよ.

3. 系が状態

$$\phi(x) = 3 - \cos\frac{2\pi}{L}x - 2\cos\frac{4\pi}{L}x \tag{7.3Q.1}$$

にあるとする. $\hat{H}$ に対応する物理量を測定したときに, どのような結果がどのような確率で得られるか. また, その期待値を求めよ.

7.4 Bra , ket vectors

問題

演算子 A の, 固有値 λ の固有状態を $|\psi_\lambda\rangle$ とする. しばしば, $|\psi_\lambda\rangle = |\lambda\rangle$ という略記が用いられる.

例えば, 演算子 $\hat{x}$ を, x 倍する演算子 $x\times$ とする. その, 固有値 x_0 の固有状態を $|x_0\rangle$ とすると

$$\hat{x}\,|x_0\rangle = x_0\,|x_0\rangle \tag{7.4Q.1}$$

である.

1. $|x_0\rangle$ に対応する関数は, $\delta(x-x_0)$ なのだった. $\langle x_0|x_1\rangle$ を求めよ.

2. 演算子 $\hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x}$ とする. その固有値 p_0 の固有状態を $|p_0\rangle$ とかく. $|p_0\rangle$ に対応する関数は, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{ip_0x}$ なのだった. $\langle p_0|p_1\rangle$ を求めよ.

3. $\langle x_0|p_0\rangle, \langle p_0|x_0\rangle$ を求めよ.

4. 関数系 $\{|x_0\rangle\}_{x_0\in\mathbb{R}}, \{|p_0\rangle\}_{p_0\in\mathbb{R}}$ はいずれも完全系をなすので, 閉包の式

$$\int dx_0\,|x_0\rangle\,\langle x_0| = \int dp_0\,|p_0\rangle\,\langle p_0| = 1 \tag{7.4Q.2}$$

がなりたつ.

任意の状態 $|\psi\rangle$ について,

$$\langle p_0|\psi\rangle = \int dx_0 \langle p_0|x_0\rangle\langle x_0|\psi\rangle,$$
$$\langle x_0|\psi\rangle = \int dp_0 \langle x_0|p_0\rangle\langle p_0|\psi\rangle.$$

が成り立つことを示せ. それが Fourier 変化と逆変換であり $\langle x_0|\psi\rangle$ が $\psi(x_0)$, $\langle p_0|\psi\rangle$ がその Fourier 変換であることを説明せよ.

5. スペクトル分解

$$\hat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |x\rangle \, x \, \langle x| \, ,$$
$$\hat{p} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \, |p\rangle \, p \, \langle p| \, ,$$

が成立することを, 右辺を関数に作用させることによって示せ. なお, 右辺に現れる x, p は (演算子でなく) 実数.

参考文献

[1] 清水先生の講義ノート http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)

[3] ランダウ, リフシッツ 量子力学 1,2 (東京図書)