第9回　量子力学 I 演習 問題

樋口 さぶろお[1]

1999 年 12 月 20 日

9.1　演算子の代数

問題

1. 演算子 $[x, \frac{d}{dx}]$ を求めよ.
2. 演算子 A, B を

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx}+x\right), \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx}-x\right)$$

と定義する. 次を求めよ.

$$\begin{aligned} \text{関数} \quad & B(x\exp(-x^2/2)), \\ \text{関数} \quad & (2AB+1)\exp(-x^2/2), \\ \text{演算子} \quad & [A,B], \\ \text{演算子} \quad & [A,B^2]. \end{aligned}$$

9.2　交換子の性質

問題

[1]hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp, URL: http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/,
へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1]この文書の最新版はhttp://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/ にあるかもしれません.

1. 任意の演算子 A,B,C に対して次を示せ.

$$[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C \quad \text{(Leibniz rule).}$$

2. 関係 $[[A,B],B]=0$ が成り立つとき,

$$[A,B^n]=n[A,B]B^{n-1}, \qquad (n\in\mathbb{N})$$
$$[A,g(B)]=[A,B]\,\frac{dg}{dz}(B).$$

   を示せ. ただし, g は巾級数

$$g(z)=\sum_{j=0}^{\infty}g_j z^j \tag{9.2Q.1}$$

   で定義される関数 (十分よい収束性を持つとしてよい).

3. 演算子 A,B に対して, $[A,B]=1$ とする. 次の式を簡単にせよ.

$$[B,A], \quad [A^2,B^2], \quad [A,\mathrm{e}^B].$$

9.3 同時対角化可能性

問題

演算子 A,B が可換であるとする.

1. 波動関数 ϕ が, 演算子 A の固有値 a の固有関数であるとする. $B\phi\neq 0$ なら, 波動関数 $B\phi$ も, 演算子 A の固有値 a の固有関数であることを示せ.

2. 演算子 A の固有値 a の固有関数は, ϕ (とその定数倍) しかないとする. (これを, '固有値 a に縮退がない' という). このとき, ϕ は B の固有関数でもあることを示せ.

9.4 Hermitian operators

問題

演算子 A, B が, 任意の波動関数 $\phi(x), \psi(x)$ に対し, 式

$$\langle\psi|A|\phi\rangle = \langle\phi|B|\psi\rangle^* (\equiv \langle B\psi|\phi\rangle) \tag{9.4Q.1}$$

を満たすとき, B を A の Hermite 共役演算子といい, $B = A^\dagger$ とかく. $A = A^\dagger$ のとき, A は Hermite 演算子であるという. $A = -A^\dagger$ のとき, A は 反 Hermite 演算子であるという. テキストの例題 1.9 参照.

1. 演算子 A と数 (定数倍演算子) $a \in \mathbb{C}$ に対して, $(aA)^\dagger = a^* A^\dagger$ であることを示せ.
2. A が Hermite 演算子, a が実数 [純虚数] のとき, aA は Hermite [反 Hermite] 演算子であることを示せ.
3. A, B が Hermite 演算子のとき, $\{A, B\} := AB + BA$ は Hermite 演算子. $[A, B] := AB - BA$ は反 Hermite 演算子であることを示せ. 一般の演算子 A, B に対して $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ が成立することを用いてよい.
4. 演算子 $x, p = -i\hbar(d/dx), H = p^2/2m$ が hermitian であることを示せ.

Hint. これらの演算子に作用される波動関数 $\psi(x)$ は, 規格化可能で $|x| \to \infty$ で $\psi(x) \to 0$ であるとする.

5. 時間と興味のある人は $(A^\dagger)^\dagger = A$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ を示せ.

9.5 Hermite 演算子の固有値, 固有状態

問題

1. 演算子 A が Hermite であるということの定義をかけ.
2. Hermite 演算子 A の固有値は実数であることを示せ.

Hint. 演算子 A の固有状態 $|\phi\rangle$ を考える: $A|\phi\rangle = a|\phi\rangle$. 固有値 $a = \langle\phi|A|\phi\rangle$ が a^* に等しいことをいえばよい.

3. 反 Hermite 演算子の固有値は純虚数であることを示せ.
4. Hermite 演算子 A の, 異なる固有値に属する固有状態はたがいに直交することを示せ.

Hint. 2 つの固有状態 ϕ_1, ϕ_2 を考える: $A|\phi_1\rangle = a_1|\phi_1\rangle, A|\phi_2\rangle = a_2|\phi_2\rangle, a_1 \neq a_2$. 行列要素 $\langle\phi_1|A|\phi_2\rangle$ を評価するときに, A を $\langle\phi_1|$ に作用させてもよいし, $|\phi_2\rangle$ に作用させてもよい.

参考文献

[1] 清水先生の講義ノート http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)