# 第12回　量子力学 I 演習 問題

**樋口 さぶろお**[1]

**2000 年 1 月 31 日**

## 12.1　有限の深さの井戸型ポテンシャル

### 問題

質量 $m$ の粒子が, 1 次元空間を, 幅 $2a$, 深さ $V_0$ の '井戸型' ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} V_0(>0) & (x < -a, \text{領域 I}) \\ 0 & (|x| < a, \text{領域 II}) \\ V_0(>0) & (x > +a, \text{領域 III}) \end{cases} \tag{12.1Q.1}$$

のもとで運動している. Schrödinger 表現された固有値問題をといて, エネルギー固有状態のうち束縛されたもの ( $|x| \to \infty$ で $|\psi(x)| \to 0$ となるもの) とそのエネルギー固有値を求めよ. 基底状態, いくつかの励起状態の波動関数の概形を示せ.

解き方が思いうかばない人は, 以下の手順に従ってもよい. 規格化は気にしなくてよい.

1. エネルギーを $E$ とおき, 領域 I, II, III で, 境界条件を気にせず, それぞれ固有状態を求めよ (それぞれ, 2 つの解の線型結合となる). ここで, 固有値 $E$ は領域によらない量であることに注意.
2. 領域 I, III で, $|x| \to \infty$ での境界条件を課せ (一方の解のの係数が 0 になる).
3. 点 $x = \pm a$ で, 2 つの波動関数が正しく接続するという条件を課せ. 連続になるべきものは何か.

---

[1] `hig@rice.c.u-tokyo.ac.jp`, URL: `http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/`, へや: 駒場 16 号館 809B, でんわ: (03)5454.6735

[1] この文書の最新版は`http://rice.c.u-tokyo.ac.jp/~hig/qm1-99/` にあるかもしれません.

## 12.2　不確定性関係を用いた基底状態の評価

### 問題

質量 $m$ の 1 次元の調和振動子の Hamiltonian は

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \tag{12.2Q.1}$$

で与えられる. 基底状態 を $|\psi_0\rangle$ についての期待値を $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi_0|\hat{A}|\psi_0\rangle$ と略記する.

不確定性関係

$$\left\langle(\widehat{\delta x})^2\right\rangle\left\langle(\widehat{\delta p})^2\right\rangle \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \tag{12.2Q.2}$$

を利用して, 基底エネルギー $\langle\hat{H}\rangle$ の下限を求めよ.

ただし,

$$\widehat{\delta x} = \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle,\ \ \widehat{\delta p} = \hat{p} - \langle\hat{p}\rangle. \tag{12.2Q.3}$$

## 12.3　片側有限井戸型ポテンシャル

### 問題

1 次元の粒子が, ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & (x < 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ 0 < V_0 < \infty & (x > a) \end{cases} \tag{12.3Q.1}$$

のもとで運動している. 束縛された ( i.e. $|x| \to \infty$ で $|\psi(x)| \to 0$ となる) エネルギー固有状態とエネルギー固有値を考えよう.

1. 基底状態, 第 1,2,3 励起状態が存在するとして, その波動関数の様子を直観的に描け.

2. 以下の手順に従って, 束縛状態がいくつあるかを厳密に考えよう. まず, 境界条件を考慮すると, 領域 I ($0 < x < a$), 領域 II ($x > a$) それぞれで, Schrödinger 方程式の解が

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = A\sin(kx), \tag{12.3Q.2}$$

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = B\exp(-\kappa x) \tag{12.3Q.3}$$

であることを示せ. ただし Hamiltonian の固有値は

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = V_0 - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}. \tag{12.3Q.4}$$

3. $x = a$ での接続条件 $\psi_{\mathrm{I}}(a) = \psi_{\mathrm{II}}(a)$, $\psi'_{\mathrm{I}}(a) = \psi'_{\mathrm{II}}(a)$ から, 条件

$$ka\cot(ka) = -\kappa a \tag{12.3Q.5}$$

を導け.

4. (12.3Q.4) から $\kappa a$ を $ka$ で表す式をもう一つ作れ.

5. 縦軸を $\kappa a$, 横軸を $ka$ にとり, 許される $k$ の値を 2 つのグラフの交点として示せ.

## 12.4 無限に高い井戸型ポテンシャル

### 問題

ポテンシャルの壁の高さが有限の場合の解答の過程の適当な時点で極限 $V_0 \to \infty$ をとり, ポテンシャルの壁が無限に高い場合の固有値と固有状態

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{2a}x} + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-i\frac{n\pi}{2a}x}\right),\ E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2}, (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12.4Q.1}$$

を導け.

## 参考文献

[1] 清水先生の講義ノート http://as2.c.u-tokyo.ac.jp/lecture_note/index.html

[2] サクライ, 現代の量子力学 (吉岡書店)