

ポアソンモデル・正規モデルのベイズ推定

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学大学院 先端理工学部研究科 数理・情報科学コース

計算科学特論 L05(2024-10-23 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-10-29 Tue 09:39 JST hig"

今日の目標

- ポアソンモデルと、その共役分布であるガンマ分布を説明できる
- 事後予測分布を説明できる
- 正規モデルと、その共役分布である正規分布を説明で



L04-Q4

Quiz 解答: 指数分布の信用区間と最高事後密度領域

累積分布関数 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. $F^{-1}(p) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - p)$.

- ① ベイズ信用区間を $[\ell, u]$ とすると,
 $F(\ell) = \frac{\alpha}{2}$ より, $\ell = F^{-1}(\frac{\alpha}{2}) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - \frac{\alpha}{2})$.
 $F(u) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ より, $u = F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = -\frac{1}{\lambda} \log(\frac{\alpha}{2})$.
- ② f は $x = 0$ で最大, $x < 0$ で最小, $x > 0$ で単調減少なので, 最高事後密度領域は $\{x | f(x) \leq f_c\} = [0, x_c]$ と書ける. $f_c = f(x_c)$ である.
 $F(x_c) = 1 - \alpha$. よって, $x_c = F^{-1}(1 - \alpha) = -\frac{1}{\lambda} \log(\alpha)$.

確率モデルとその共役分布

確率モデル	共役分布
ベルヌイ分布	ベータ分布
二項分布	ベータ分布
多項分布	ディリクレ分布
ポアソン分布	ガンマ分布
正規分布	正規分布

ここまで来たよ

4 信頼区間・信用区間・最高事後密度領域

5 ポアソンモデル・正規モデルのベイズ推定

- ポアソンモデル
- 正規分布の和
- 正規モデル（母分散固定）
- 事後予測分布

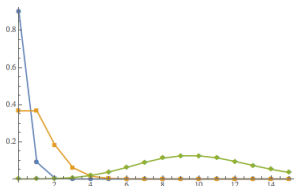
ポアソンモデル

Hoff ベイズ §3.2

ポアソン分布

離散型確率変数 X が次の確率分布を持つとき, X はパラメタ λ のポアソン分布 $\text{Po}(\lambda)$ に従うという.

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



$\text{Po}(0.1), \text{Po}(1), \text{Po}(10)$

意味: 独立に, 時間に比例して, 単位時間に平均すると λ 回起きる事象が, 単位時間内に k 回起きる確率.

命題 (ポアソン分布の母平均値と母分散)

$$E[X] = \lambda, \quad V[X] = \lambda.$$

ポアソンモデルの共役分布は？

$Y_1, \dots, Y_N \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Po}(\lambda)$, すなわち,

$$f_{Y|\theta}(y|\theta) = \frac{\theta^y}{y!} e^{-\theta}$$

$$f_{Y|\theta}(y_1, \dots, y_N|\theta) = \frac{\theta^{\sum_i y_i}}{y_1! \dots y_N!} e^{-N\theta}$$

とする.

どんな $f_\theta(\theta)$ が共役分布になるか考えよう.

θ の事前分布が $f_\theta(\theta)$ のとき,

θ の事後分布は

$$f_{\theta|Y}(\theta|y_1, \dots, y_N) = C \times f_{Y|\theta}(y_1, \dots, y_N|\theta) f_\theta(\theta) = \frac{\theta^{\sum_i y_i}}{y_1! \dots y_N!} e^{-N\theta} f_\theta(\theta).$$

これが元に戻る (=事前と事後が同じクラスに属する) のはどんな分布？

$$f(\theta) = C' \times \theta^{a-1} e^{-b\theta}$$

ガンマ分布

定義 (ガンマ分布)

次の確率密度関数を持つ連続型確率変数 θ を，パラメタ a, b のガンマ分布 $\text{gamma}(a, b)$ にしたがるという．

$$f(\theta|a, b) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} & (\theta > 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

指数分布は $\text{gamma}(1, \lambda)$ ，自由度 n のカイ二乗分布は $\text{gamma}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ ．

命題 (ガンマ分布の性質)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Theta] &= \frac{a}{b}, \\ \mathbb{V}[\Theta] &= \frac{a}{b^2} \end{aligned}$$

θ の事後分布

θ を連続型確率変数 Θ と考える。

事前確率密度を、 $\Theta \sim \text{gamma}(a, b)$ とする。

ベイズの定理より、 $Y_1 = y_1, \dots, Y_N = y_N$ という結果を得たときの Θ の事後確率密度は、

$$\begin{aligned} f_{\theta|Y:}(\theta|y_1, \dots, y_N) &= \frac{f(y_1, \dots, y_N, \theta)}{f_Y(y_1, \dots, y_N)} \\ &= \frac{f_{Y:|\theta}(y_1, \dots, y_N|\theta) \times f_{\theta}(\theta)}{f_{Y:}(y_1, \dots, y_N)} \\ &= \frac{C' \theta^{\sum_i y_i} e^{-N\theta} \times \theta^{a-1} e^{-b\theta}}{f_{Y:}(y_1, \dots, y_N)} \end{aligned}$$

すなわち、事後確率密度は、 $\Theta|Y_1 = y_1, \dots \sim \text{gamma}(a + \sum_i y_i, b + N)$

命題 (ポアソンモデルの共役分布)

ポアソンモデルの共役分布はガンマ分布

情報の統合

Hoff ベイズ p.44

事前分布 $\Theta \sim \text{gamma}(a, b)$.

事前期待値 $E[\Theta] = \frac{a}{b}$

‘標本分布’ N 単位時間中に $\sum_i y_i$

‘標本期待値’ $= \frac{\sum_i y_i}{N}$.

事後分布 $\Theta \sim \text{gamma}(a + \sum_i y_i, b + N)$.

事後期待値 $E[\Theta | Y_i = y_i] = \frac{a + \sum_i y_i}{b + N} = \frac{b}{b + N} \frac{a}{b} + \frac{N}{b + N} \frac{\sum_i y_i}{N}$ は両者の重み付き平均.

標本サイズが小さければ、事前期待値の影響が残る．標本サイズが大きければ、標本期待値に近づく．

分散も同様に解釈できる．

ここまで来たよ

4 信頼区間・信用区間・最高事後密度領域

5 ポアソンモデル・正規モデルのベイズ推定

- ポアソンモデル
- 正規分布の和
- 正規モデル（母分散固定）
- 事後予測分布

L05-Q1

Quiz(確率分布の規格化定数)

確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = Ce^{-x^2-2x+3}$$

で与えられる．定数 C を求めよう．

L05-Q2

Quiz(正規分布の確率)

連続型確率変数 X は, 確率密度関数

$$f(x) = C \times e^{-8x^2+48x}$$

を持つ. ここで C は定数である.

- ① $E[X]$ を求めよう.
- ② $V[X]$ を求めよう.
- ③ $f(x)$ のグラフを, 標準正規分布の確率密度関数と重ねて描こう.

和の確率

$S = X + Y$ の確率関数 $p_S(s)$ は?

確率 $P(S = s) = p_S(s)$ となるべき.

$$P(S = s) \stackrel{\text{定義}}{=} \sum_x \sum_y \mathbf{I}_{[x+y=s]}(x, y) p(x, y) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, s - x)$$

特徴関数 $\mathbf{I}_{[\text{ナントカ}]}(x)$ は, ナントカが成立するとき 1, しないとき 0.

母期待値 $E[g(S)]$ を $p_S(s)$ で求めたものと, $E[g(X + Y)]$ を $p(x, y)$ で求めたものは同じ.

和の確率関数

同時分布 $p(x, y)$ を持つ離散型確率変数 X, Y に対し, 和 $S = X + Y$ の確率関数は,

$$p_S(s) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, s - x).$$

2次元連続型確率変数の和

$S = X + Y$ の確率密度関数 $f_s(s)$ は?

確率 $P(c \leq S < d) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{[c \leq s < d]}(s) f_s(s) ds$ となるべき.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &\stackrel{\text{定義}}{=} \iint_{-\infty}^{+\infty} I_{[c \leq x+y < d]}(x, y) f(x, y) dy dx \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} I_{[c \leq s < d]}(s) f(t, s-t) ds dt \quad \text{変換 } s = x + y, t = x. \quad |J| = 1 \end{aligned}$$

よって, $f_s(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s-t) dt$.

($c = -\infty$ において累積分布関数 $F(d) = P(S < d)$ で話すことも)

和の確率密度関数

連続型 X, Y の確率密度関数: $f(x, y)$. 和 $S = X + Y$ の確率密度関数は,

$$f_s(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, s-x) dx.$$

たたみ込み convolution

和の確率密度関数

連続型確率密度関数が独立で、 X, Y の確率密度関数 $f(x, y)$ が $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ と書けるとき、和 $S = X + Y$ の確率密度関数 $f_S(s)$ は、

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(s-x)dx.$$

この右辺の積分を、2つの関数 $f(x), g(y)$ の **たたみ込み合成積 convolution** といい、 $(f * g)(s)$ と書くことがある。

合成積 $(f * g)$ のフーリエ変換は、 f, g のフーリエ変換の積

フーリエ解析

正規分布の再生性

確率変数 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ が独立のとき,
和の確率変数 $S = X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

モーメント母関数を使うと楽に、使わなくてもローテクな直接計算で証明できる.

L05-Q3

Quiz(正規分布の和の分布)

連続型確率変数 X_1, X_2 は, 独立同分布 $N(0, 1^2)$ にしたがう.

- ① 連続型確率変数 $S = X_1 + X_2$ のしたがう分布を答えよう.
- ② 連続型確率変数 $D = 2X_1$ のしたがう分布を答えよう.

ここまで来たよ

4 信頼区間・信用区間・最高事後密度領域

5 ポアソンモデル・正規モデルのベイズ推定

- ポアソンモデル
- 正規分布の和
- 正規モデル（母分散固定）
- 事後予測分布

正規モデル

Hoff ベイズ §5

ドーナツ製造機は、母平均値 μ g, 母分散 σ^2 g² の正規分布にしたがう質量 y g のドーナツを作り出す. $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(y|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

当面, σ^2 は固定して定数と思う.

共役分布は、各測定値の同時分布を「 μ の分布としてみたもの」…また正規分布じゃん.

事前分布を, $N(\mu_0, \tau_0^2)$ としてみる.

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0^2}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\tau_0^2}}$$

標本 $y_1, \dots, y_N$.
事後分布は

$$f(\theta|y_1, \dots, y_N) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (y_i - \mu)^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0^2}} e^{-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\tau_0^2}}$$

計算 μ のどんな分布？

$$\mu \sim N\left(\frac{\tau_0^{-2}\mu_0 + N\sigma^{-2}\frac{1}{N}\sum_i y_i}{\tau_0^{-2} + N\sigma^{-2}}, (\tau_0^{-2} + N\sigma^{-2})^{-1}\right)$$

情報の統合

$$E[\mu] = \frac{\tau_0^{-2}}{\tau_0^{-2} + N\sigma^{-2}} \mu_0 + \frac{N\sigma^{-2}}{\tau_0^{-2} + N\sigma^{-2}} \frac{1}{N} \sum_i y_i.$$

$$V[\mu]^{-1} = \tau_0^{-2} + N\sigma^{-2}.$$

(分散)⁻¹ を精度 (precision) とでも呼んだ方が簡単.

L05-Q4

Quiz(正規分布の母平均値のベイズ推定)

確率変数 Y は, 正規分布にしたがう. すなわち,

$$f(y|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

事前分布を

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_0^2}} e^{-\frac{(\mu-0)^2}{2\tau_0^2}}$$

として, 母平均値 μ のベイズ推定を考える.

- ① Y のサイズ 1 の標本として, y_1 が得られたとき, μ の事後分布を求めよう. μ の母平均値, 母分散を求めよう.
- ② 上の場合の予測分布 $f(\tilde{y}|y_1)$ を求めよう.
- ③ Y のサイズ 2 の標本として, y_1, y_2 が得られたとき, μ の事後分布を求めよう. μ の母平均値, 母分散を求めよう.

ここまで来たよ

4 信頼区間・信用区間・最高事後密度領域

5 ポアソンモデル・正規モデルのベイズ推定

- ポアソンモデル
- 正規分布の和
- 正規モデル（母分散固定）
- 事後予測分布

事後予測分布 (ポアソンモデル)

Hoff ベイズ p.54

事前分布 $\Theta \sim \text{gamma}(a, b)$, 観測値 $y_1, \dots, y_N$ のもとで, 次の観測値 $\tilde{Y} = \tilde{y}$ の分布を事後予測分布という. 母数 θ の事後分布にしたがう様々な y の分布のもとで, 確率を合計したもの.

$$\begin{aligned}
 f_{Y|Y:}(\tilde{y}|y_1, \dots, y_N) &= \int_0^{+\infty} f_{Y, \theta|Y:}(\tilde{y}, \theta|y_1, \dots, y_N) d\theta \\
 &= \int_0^{+\infty} f_{Y|\theta, Y:}(\tilde{y}|\theta, y_1, \dots, y_N) f(\theta|y_1, \dots, y_N) d\theta \\
 &= \int_0^{+\infty} f(\tilde{y}|\theta) \times f(\theta|y_1, \dots, y_N) d\theta \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\tilde{y}!} \theta^{\tilde{y}} e^{-\theta} \times \frac{(b+N)^{a+\sum_i y_i}}{\Gamma(a+\sum_i y_i)} \theta^{a+\sum_i y_i-1} e^{-(b+N)\theta} d\theta \\
 &= \dots = \text{'パラメタ } a + \sum_i y_i, b+N \text{ の負の二項分布'}
 \end{aligned}$$

事後予測分布（二項モデル）

Hoff ベイズ p.45

事前分布 $\Theta \sim \text{beta}(a, b)$, 観測値 $y_1, \dots, y_N$ のもとで, 次の観測値 $\tilde{Y} = \tilde{y}$ の分布を事後予測分布という.

母数 θ の事後分布にしたがう様々な y の分布のもとで, 確率を合計したもの.

$$\begin{aligned} P(\tilde{Y} = 1 | Y_1 = y_1, \dots) &= \int_0^{+\infty} P(\tilde{Y} = 1, \Theta = \theta | Y_1 = y_1, \dots) d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} P(\tilde{Y} = 1 | \Theta = \theta, Y_1 = y_1, \dots) f(\theta | y_1, \dots, y_N) d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} P(\tilde{Y} = 1 | \Theta = \theta) \times f(\theta | y_1, \dots, y_N) d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \theta \times f(\theta | y_1, \dots, y_N) d\theta \\ &= E[\Theta | y_1, \dots] = \frac{a + \sum_i y_i}{a + b + N} \end{aligned}$$

事後予測分布（正規分布）

事前分布 $\mu \sim \text{gamma}(\mu_0, \tau_0^2)$, 観測値 $y_1, \dots, y_N$ のもとで, 次の観測値 $\tilde{Y} = \tilde{y}$ の分布を考える.

$$\begin{aligned} f_{Y|Y:}(\tilde{y}|y_1, \dots, y_N) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y,\mu|Y:}(\tilde{y}, \mu|y_1, \dots, y_N) d\mu \\ &= \int_0^{+\infty} f_{Y|\mu,Y:}(\tilde{y}|\mu, y_1, \dots, y_N) f(\mu|y_1, \dots, y_N) d\mu \\ &= \int_0^{+\infty} f(\tilde{y}|\theta) \times f(\theta|y_1, \dots, y_N) d\theta \end{aligned}$$

正規分布にしたがう独立な確率変数 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に対して, 和 $S = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ であることから,

$$\tilde{Y} \sim N\left(\frac{\tau_0^{-2}\mu_0 + N\sigma^{-2}\frac{1}{N}\sum_i y_i}{\tau_0^{-2} + N\sigma^{-2}}, (\tau_0^{-2} + N\sigma^{-2})^{-1} + \sigma^2\right).$$