

時系列解析・擬似乱数の生成と質

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学大学院 先端理工学部研究科 数理・情報科学コース

計算科学特論 L12(2024-12-12 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-12-16 Mon 07:00 JST hig"

今日の目標

- 時系列の $AR(m)$ モデルとその自己共分散を説明できる
- 時系列の一例である擬似乱数列の生成方法と品質評価を説明できる



L11-Q1

Quiz 解答: マルコフ連鎖の定常分布と時間発展

- ① 転置推移確率行列 M の固有値 $\lambda_1 = 1$ の固有ベクトル $\vec{u}_1$ を (あるなら) 求めればよい. $M\vec{u}_1 = \vec{u}_1$ を解いて, $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} s$ ($s \neq 0$). 定常分布は, 規格化された $\vec{u}_1 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- ② $\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- ③ 転置推移確率行列 M の固有値 (絶対値の大きさの順に) $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$, 固有ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ を求めると,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{6}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} s, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} s \quad (s \neq 0).$$

固有方程式には解 $\lambda_1 = 1$ があることが最初からわかってるから, 因数分解は楽.

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ とも $s = 1$ に固定する (他の取り方をしても最終的には同じ $\vec{p}(t)$ が求まる).

$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= M^t \vec{p}(0) \\ &= (UDU^{-1})^t \vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{pmatrix}^{-1} \vec{p}(0)\end{aligned}$$

$U^{-1}\vec{p}(0)$ さえ計算すればいいわけだが, これを $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおいてあとで決める方が楽.

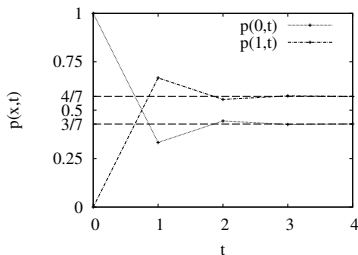
$$\begin{aligned}\vec{p}(t) &= \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \lambda_1^t & \vec{u}_2 \lambda_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= a\vec{u}_1 \lambda_1^t + b\vec{u}_2 \lambda_2^t.\end{aligned}$$

これが $\vec{p}(0)$ と等しくなるように, 連立方程式 $\vec{p}(0) = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ を解いて a, b を決めると $a = \frac{1}{7}, b = \frac{4}{7}$. よって,

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t.$$

$t \rightarrow +\infty$ でも $\vec{p}(t)$ が確率ベクトルでありつづけることから, $\vec{u}_1$ の係数が $\frac{1}{7}$ であること (=この項が確率ベクトルであること) は計算しなくてもわかる.

時間変化. $|-\frac{1}{6}| < 1$ なので, $\vec{p}(t) \rightarrow \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \rightarrow +\infty)$



4

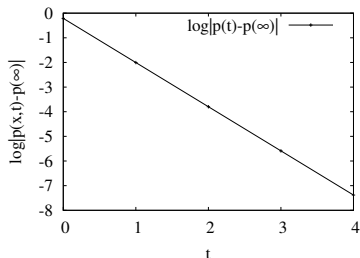
$$\vec{p}(t) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t$$

極限分布 $\vec{p}(\infty) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ との差の大きさ (ベクトルの長さ) を考えると,

$$\begin{aligned} |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| &= \left| \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| - \frac{1}{6} |t| \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{7} \left| -\frac{1}{6} \right|^t \end{aligned}$$

$$\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)| = t \times \log \left| -\frac{1}{6} \right| + \log \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

よって, t 対 $\log |\text{差}|$ のグラフを描くと, 傾き $\log |\text{第2固有値}|$ の直線になるはず。



状態空間が 3 点以上からなり, (第 2 固有値より絶対値が小さい) 第 3 固有値以降がある場合も, t が大きいところではこの直線に近づいていく.

L12-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の定常分布と時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $\{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

なお, M の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを使ってよい.

- ① 定常分布をすべて求めよう.
- ② 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ③ 上のとき, $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を $t \rightarrow +\infty$ で 1 次関数で近似しよう.

ここまで来たよ

11 マルコフ連鎖の時間発展・周期的・可約なマルコフ連鎖

12 時系列解析・擬似乱数の生成と質

- 擬似乱数の発生方法
- 時系列解析
- 乱数の仕組みと品質

擬似乱数の発生方法

ここで C の `getuniform()` は, Python の `scipy.stats.uniform(loc=0,scale=1)` に相当.

ここまで来たよ

11 マルコフ連鎖の時間発展・周期的・可約なマルコフ連鎖

12 時系列解析・擬似乱数の生成と質

- 擬似乱数の発生方法
- 時系列解析
- 乱数の仕組みと品質

時系列解析

来週までの課題 1 L12-Q1

Quiz(AR(1) モデルの例)

1 次の自己回帰モデル AR(1) モデルは、授業中に使った記号を用いると、 $\sigma > 0, \phi$ を定数、 $R(t)$ を同分布にしたがう確率変数として次のように書ける。

$$\begin{aligned} X(t) &= \phi \times X(t-1) + R(t) \quad (t = 1, 2, 3, \dots) \\ E[R(t)] &= 0, \\ E[R(t)X(s)] &= 0 \quad (t > s), \\ E[R(t)R(s)] &= \sigma^2 \times \delta_{t,s} = \sigma^2 \times \begin{cases} 1 & (t = s) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}. \end{aligned}$$

また、 $X(0)$ は定数 0 に等しいとしてよい ($P(X(0) = 0) = 1$).

- ① $X(2)$ を、 $R(1), R(2), \phi$ で表そう。
- ② $E[X(1)^2]$ を σ と ϕ で表そう。
- ③ $\phi = -0.9$ のとき、共分散 $\text{Cov}[X(1), X(2)]$ は正になるか、0 になるか、負になるか。日本語の理由または計算過程とともに答えよう。

ここまで来たよ

11 マルコフ連鎖の時間発展・周期的・可約なマルコフ連鎖

12 時系列解析・擬似乱数の生成と質

- 擬似乱数の発生方法
- 時系列解析
- 乱数の仕組みと品質

C での `srand(int)` に相当して、Python には `np.random.seed(seed)` や、もっと高度なもの（乱数を生成する時系列の状態を表すオブジェクトの設定など）がある

来週までの課題 2 L12-Q2

Quiz(rand() の振る舞い)

次のプログラムで, seed を無作為に入力する.

```

1 double getuniform(){
2     /* 略. rand() を定数倍して[0,1)一様乱数を返す. 授業と同じもの */
3 }
4
5 int getrandom(double y){
6     if( y<1/7.0 ){
7         return 0;
8     }else if( y<3/7.0 ){
9         return 1;
10    }else{
11        return 2;
12    }
13 }
14
15 int main(){
16     int seed;
17     int x,y;
18     scanf("%d",&seed);
19     srand(seed);
20     x=getrandom(getuniform());
21     if( x==getrandom(getuniform()) ){
22         printf("A\n");
23     }
24     srand(seed);
25     y=getrandom(getuniform());
26     if( x==y ){
27         printf("B\n");
28     }
29     return 0;
30 }

```

- A が出力される (B はどうでもいい) 確率を理由とともに答えよう
- B が出力される (A はどうでもいい) 確率を理由とともに答えよう