

逆関数法・棄却法による乱数の生成

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学大学院 先端理工学部研究科 数理・情報科学コース

計算科学特論 L13(2024-12-19 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2024-12-18 Wed 13:40 JST hig"

今日の目標

- 逆関数法で、一様乱数から他の乱数を生成できる
- 棄却法で、一様乱数から他の乱数を生成できる



L12-Q1

Quiz 解答:AR(1) モデルの例

- ① $X(1) = \phi X(0) + R(1) = R(1).$
 $X(2) = \phi X(1) + R(2) = \phi^2 X(0) + \phi R(1) + R(2) = \phi R(1) + R(2).$
- ② $E[X(1)^2] = E[R(1)^2] = \sigma^2.$
- ③ $\text{Cov}[X(1), X(2)] = \text{Cov}[R(1), \phi R(1) + R(2)] = \phi \text{Cov}[R(1), R(1)] = \phi E[R(1)^2] = \phi \sigma^2 = -0.9\sigma^2 < 0.$
 $X(2)$ は項 $-0.9X(1)$ を含むので, $X(1)$ が大きいほど $X(2)$ は小さい (負で絶対値が大きい) 傾向がある. よって, 共分散は負になるはずである.

L12-Q2

Quiz 解答:rand() の振る舞い

- ① 2 回続けて同じ値が出る確率なので, $(\frac{1}{7})^2 + (\frac{2}{7})^2 + (\frac{4}{7})^2 = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$

- ② 同一の seed で srand した直後には, rand は一定の値を返すので, 確率は 1.

ここまで来たよ

12 時系列解析・擬似乱数の生成と質

13 逆関数法・棄却法による乱数の生成

- 復習
- 逆関数法による乱数生成
- 棄却法による乱数生成

L07-Q2=L06-Q4 L13-Q1

TA Prob and Sol: 確率変数の変数変換

一様分布にしたがう確率変数 $X \sim U(1, 3)$ に対して, $Y = 1/X$ を考える. Y の確率密度関数を求めよう.

略解

$x : 1 \rightarrow 3$ のとき, $y : 1 \rightarrow 1/3$. $dx = -\frac{1}{y^2}dy$.

$1 \leq x < 3$ において確率密度関数 $f_X(x) = \frac{1}{2}$ より,

$$\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(-y^{-2})dy.$$

$|f_X(x)dx| = |f_Y(y)dy|$ より,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y^2} & (0 \leq y < \frac{1}{3}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

例題 L07-Q3 L13-Q2

TA Prob and Sol: 確率変数の変数変換 (対数正規分布)

正規分布にしたがう確率変数 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ に対して, $Y = e^X$ を考える. Y は対数正規分布にしたがうという (対数をとったら正規分布にしたがう). Y の確率密度関数を求めよう. グラフの概形を予想しよう.

略解

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ である.}$$

$y = e^x$ より, $x \in \mathbb{R}$ に対して $y > 0$. $dy = e^x dx$ すなわち, $y^{-1} dy = dx$ より,

$$f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}} y^{-1} dy.$$

よって,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y \leq 0), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}} y^{-1} & (0 < y). \end{cases}$$

ここまで来たよ

12 時系列解析・擬似乱数の生成と質

13 逆関数法・棄却法による乱数の生成

- 復習
- 逆関数法による乱数生成
- 棄却法による乱数生成

確率変数の関数

確率密度関数の変換のおぼえ方

R, Q を確率変数, f_R, f_Q を確率密度関数, $r = g(q)$ を単調増加な関数とするととき, $f_Q(q) dq$ は変数変換しても不変: $f_R(r) dr = f_Q(q) dq$

$$f_R(r) = \frac{1}{\frac{dr}{dq}(q)} f_Q(q)$$

$$P(R < g(q)) = \int_{-\infty}^{g(q)} f_R(r) dr = \int_{-\infty}^q f_Q(q) dq = P(Q < q)$$

逆関数法

$R, Q = Y \sim U(0, 1)$ について, 上の式を解いて求めた $r = g(y)$ を使うと, ほしい確率密度関数 $f_R(r)$ にしたがう R を, 連続型一様分布 $U(0, 1)$ にしたがう Y から変換して生成できる.

L13-Q3

Quiz(逆関数法)

確率密度関数

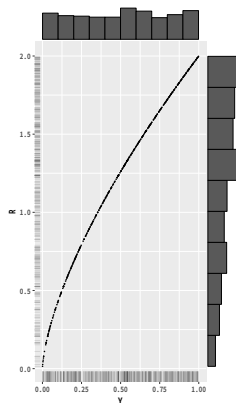
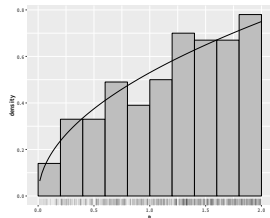
$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{r} & (0 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数 R に対応する乱数を, $[0, 1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

$[0, 1)$ 一様乱数=連続一様分布 $U(0, 1)$ にしたがう乱数


```
1 double getrandom(double y){  
2     return 2*pow(y, 2.0/3);  
3 }
```

出力



L13-Q4

Quiz(逆関数法)

確率密度関数

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (2 \leq r < 5) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数 R に対応する乱数を, $[0, 1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

L13-Q5

Quiz(逆関数法による擬似乱数生成)

次の確率密度関数

$$f_R(r) = \begin{cases} -\frac{200}{21} \frac{1}{r^3} & (-5 \leq r < -2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数 R に対応する乱数を, $[0, 1)$ 一様乱数 y から, 単調増加な $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

ここまで来たよ

12 時系列解析・擬似乱数の生成と質

13 逆関数法・棄却法による乱数の生成

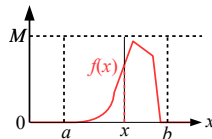
- 復習
- 逆関数法による乱数生成
- 棄却法による乱数生成

棄却法による乱数生成

連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次を満たすとする.

$$f(x) = 0 \quad (x < a, b \leq x)$$

$$0 \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x < b)$$



このとき, X に対応する乱数を次で生成できる (効率とはかく).

棄却法

```

1 double f(double x); /* プログラムが定義 */
2 double getRandom() {
3     double x, y; double a, b, M; /* プログラムが定義 */
4     while(1) {
5         x = a + (b - a) * getuniform(); /* X ~ U(a, b) */
6         z = M * getuniform(); /* Z ~ U(0, M), Z/M = R ~ U(0, 1) */
7         if (z < f(x)) {
8             break; /* 受理=accept */
9             /* 受理の確率 P(Z < f(x)) = P(R < f(x)/M) = f(x)/M */
10        } /* 棄却=reject, やりなおし */
11    }
12    return x;
13 }

```

理由 だって、 x を得る確率密度って、 $f(x)$ に比例してるでしょ.

- 棄却 0 回で x を得る確率密度 $\frac{1}{M(b-a)} f(x)$
- 棄却 1 回で x を得る確率密度 $(1 - \frac{1}{M(b-a)}) \frac{1}{M(b-a)} f(x)$
- $\vdots$
- 棄却 n 回で x を得る確率密度 $(1 - \frac{1}{M(b-a)})^n \frac{1}{M(b-a)} f(x)$
- $\vdots$

この排反事象列の和事象の確率密度は、無限等比級数の和を考えて、

$$\frac{1}{M(b-a)} f(x) \times \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{M(b-a)})} = f(x).$$

L13-Q6

Quiz(棄却法による乱数生成)

確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{21}x^2 & (1 \leq x < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う乱数を、棄却法を利用して返す関数 `double getrandom(void)` を C で書こう。

平均して、1 回の実行 (乱数 1 個の生成) に、`double getuniform()` の何回の呼び出しを要するか考えよう。

C でも Python でも。タイプでも手書きでも。