

確率過程・マルコフ連鎖

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学大学院 先端理工学研究科 数理・情報科学コース

計算科学特論 L10(2025-11-26 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-12-03 Wed 08:14 JST hig"

今日の目標

- 確率過程とマルコフ連鎖を説明できる
- 転置推移確率行列を説明できる



L09-Q1

L09-Q2

Quiz 解答: 確率変数の変換

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \quad \text{なので,}$$

①

$$E[R] = E[2\sqrt{Y}] = \int_0^1 2\sqrt{y} \, dy = \frac{4}{3}.$$

$$V[R] = E[R^2] - (E[R])^2 = E[4Y] - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

② $R = 2\sqrt{Y}$ を解くと, $y = (r/2)^2$ ($0 \leq y < 1, 0 \leq r < 2$) なので,
 $P(0.2 < R < 0.8) = P(0.01 < Y < 0.16) = 0.15.$

3

$$P(R < r) = P(Y < (r/2)^2) = \begin{cases} 0 & (r < 0) \\ r/2 & (0 \leq r < 2) \\ 1 & (2 \leq r) \end{cases}$$

4

$$F_R(r) = \int_0^r f_R(s) \, ds = (r/2)^2 \quad (0 \leq r < 2)$$

より, 両辺を微分して,

$$f_R(r) = \begin{cases} r/2 & (0 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L10-Q3

Quiz 解答: 確率変数の変換

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \leq x < d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L09-Q4

Quiz 解答: 逆関数法

$0 \leq x < 2, 0 \leq y < 1$ において,

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{x} dx &= dy \\ \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{1}{3/2} x^{3/2} &= y + C \end{aligned}$$

$y = 0$ のとき $x = 0$ より, $C = 0$ で, $g(y) = 2y^{2/3}$. このとき $y = 1$ のとき $x = 2$ も自動的に満たされる.

L09-Q5

Quiz 解答: 逆関数法

$2 \leq r < 5, 0 \leq y < 1$ において,

$$\frac{1}{3}dr = 1dy$$

$$\frac{1}{3}r = y + C$$

$y = 0$ のとき $r = 2$ より, $C = 2$ で, $g(y) = 3y + 2$. このとき $y = 1$ のとき $r = 5$ も自動的に満たされる.

ここまで来たよ

9 乱数の生成

10 確率過程・マルコフ連鎖

- 確率過程
- 確率ベクトル, 転置確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

確率過程

$X(t)$, $t = 0, 1, 2, \dots$ を, 状態空間 $S \subset \mathbb{R}$ に値をとる確率変数とする. t は確率変数につけた番号 $X_1, X_2, \dots$. ‘離散時間’ パラメタ $t \in \mathbb{Z}$. これを**確率過程** stochastic process という.

$X_1, X_2, \dots$ というと独立同分布や標本を想像するが, ここでは, 互いに独立でないもの, 特に $X(t+1)$ が $X(t')$ ($t' \leq t$) の影響を受けるようなものに興味がある

X が離散型だとして, $X(t)$ の確率関数を, $P(X(t) = x) = p(x, t)$ と略記する. このとき, $\forall t \quad \sum_x p(x, t) = 1$.

例

- 猫の状態 $x = 1, 2, 3 = n$. $\leftrightarrow$ 食う, 寝る, 遊ぶの状態
- 株価
- 気温

確率モデル

多変量解析

マルコフ連鎖 (Markov chain)

定義 (マルコフ性)

確率過程 $X(t)$ が,

$P(X(t) = . | X(t-1) = .) = P(X(t) = . | X(t-1) = ., X(t-2) = ., \dots)$
を満たすとき, マルコフ性を持つという.

$p(x, t+1)_{x=1, \dots, m}$ が $p(x, t)_{x=1, \dots, m}$ だけから決まる.

定義 (マルコフ連鎖)

$X(t)$ が離散型確率変数で, マルコフ性を持つもの.

例

- bot による文の生成 ($X(t) = (t \text{ 番目の単語の単語番号})$ (?))
- リンクをたどるクローラー ($X(t) = (t \text{ 回目のリンク先ジャンプ後のサイト番号})$)

マルコフ連鎖の例 I

状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$

状態 $x = 0$: 食べる, ...

推移確率 条件付き確率

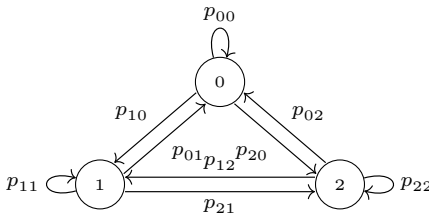
$$p_{\text{先元}} = p_{xy} = P(X(t) = x | X(t-1) = y)$$

p_{xy} が時間 t によらないと仮定する. 世の中では p_{xy} でなく p_{yx} と書くこともある.

このとき, $p(x, t+1)$ は, 全確率の法則により,

$$p(x, t+1) = \sum_y P(X(t+1) = x | X(t) = y) P(X(t) = y) = \sum_y p_{xy} p_y$$

と 1 次式で書ける.



$p(x, t)$ の漸化式 (全確率の法則)

$$p(0, t) = p_{00} \cdot p(0, t-1) + p_{01} \cdot p(1, t-1) + p_{02} \cdot p(2, t-1)$$

$$p(1, t) = p_{10} \cdot p(0, t-1) + p_{11} \cdot p(1, t-1) + p_{12} \cdot p(2, t-1)$$

$$p(2, t) = p_{20} \cdot p(0, t-1) + p_{21} \cdot p(1, t-1) + p_{22} \cdot p(2, t-1)$$

$$\begin{pmatrix} p(0, t) \\ p(1, t) \\ p(2, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0, t-1) \\ p(1, t-1) \\ p(2, t-1) \end{pmatrix}$$

$$p(x, t) = \sum_{y=0,1,2} p_{xy} \cdot p(y, t-1). \quad (x = 0, 1, 2)$$

転置推移確率行列 M , 分布=ベクトル $\vec{p}(t)$ で書くと $(x, y$ が成分番号)

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1).$$

この漸化式を解くと, $\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1) = M^2\vec{p}(t-2) = \dots = M^t\vec{p}(0).$

L10-Q1

Quiz(マルコフ連鎖の推移確率行列)

ある時計の短針は $x = 0, \dots, 11$ の 12 箇所の「時」のみを指す. ある時刻の t 時間後に指している「時」を $X(t)$ とする.

時刻 t に $X(t)$ を指すとき, 時刻 $t+1$ には, 確率 $\frac{7}{10}$ で $X(t)$ の (時計まわりに) 次の「時」を指すが, 確率 $\frac{2}{10}$ で $X(t)$ を指し, 確率 $\frac{1}{10}$ で $X(t)$ のひとつ前の「時」を指す.

これをマルコフ連鎖としてとらえる.

- ① 状態 $x = 0, \dots, 11$ の間の推移図を書こう (適当に中間を…で省略してよい).
- ② 転置推移確率行列を書こう (適当に中間を…で省略してよい).
- ③ 時刻 $t = 0$ における分布が $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ であるとき, $\vec{p}(1)$ を求めよう.

ここまで来たよ

9 乱数の生成

10 確率過程・マルコフ連鎖

- 確率過程
- 確率ベクトル, 転置確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

線形代数のりで確率ベクトル, 転置確率行列の言葉を準備!

非負ベクトル

m 次元ベクトル $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{pmatrix}$ が $p_i \geq 0$ を満たすとき, **非負ベクトル**という.

確率ベクトル

非負ベクトル $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{pmatrix}$ が, **規格化** $\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1$ を満たすとき, **確率ベクトル**という.

離散型確率分布 $f(x)$ は, 確率ベクトルと 1 対 1 に対応.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

非負行列 ($n \times m = 3 \times 2$ の例で)

実行列 $\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \\ p_{20} & p_{21} \end{pmatrix}$ が $p_{ij} \geq 0$ を満たすとき**非負行列**という.

転置確率行列

行列 $M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \\ p_{20} & p_{21} \end{pmatrix}$ の各列ベクトルが確率ベクトルであるとき, つまり $\forall j \sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = 1$ であるとき, M を**転置確率行列**という.

推移確率行列

転置推移確率行列

マルコフ連鎖に現れる, 転置確率行列

$$M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

を, マルコフ連鎖の**転置推移確率行列**という. $m \times m$ 正方行列.

漸化式 $\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$ の解

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1) = M^2\vec{p}(t-2) = \cdots = M^t\vec{p}(0).$$

転置確率行列と確率ベクトルの積

M が転置確率行列, $\vec{p}$ が確率ベクトルのとき, $M\vec{p}$ も確率ベクトル

証明:

確率過程とマルコフ連鎖

確率過程 時間 t に依存する確率変数

もちろん反復試行から来る独立な確率変数群 $R(t)$ も時間 t に依存するけど, 独立じゃない場合があるかもしれない

離散時間マルコフ連鎖は, 次の性質を満たす確率過程.

離散時間 t が離散的. $t = 0, 1, 2, \dots$

マルコフ Markov $\vec{p}(t)$ が直前の時刻の分布 $\vec{p}(t-1)$ だけから決まる. 転置推移確率行列 p_{xy} で表現できる.

連鎖 chain 状態空間 $S \ni x$ が離散的.

いま考えてる, 時間空間離散のランダムウォークや猫は離散時間マルコフ連鎖の典型例.

離散時間マルコフ連鎖の (確率) 分布は, 確率ベクトルで表現できる.

離散時間マルコフ連鎖の遷移確率は, 転置確率行列で表現できる.

ここまで来たよ

9 乱数の生成

10 確率過程・マルコフ連鎖

- 確率過程
- 確率ベクトル, 転置確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

定常分布

転置推移確率行列 M を持つマルコフ連鎖のについて, **定常分布** $\vec{p}$ とは, $\vec{p} = M\vec{p}$ となる分布 $\vec{p}$ のことである.

意味 **自分の言葉でどうぞ**

線形代数の言葉で言うと, 定常分布は, 転置推移確率行列 M の

自分の言葉でどうぞ

$\vec{p}$ は M の**不変分布**ともいう.

建設的心配性大爆発

- 定常分布っていつでもある? $\leadsto$ Yes
- 固有値 (の絶対値) が 1 より大きな固有ベクトルはあるの? $\leadsto$ No

状態数 m が有限のとき, **ペロン・フロベニウスの定理**から言える.

定理 (非負行列に対する Peron-Frobenius の定理)

非負正方行列 A に対して

- A は実固有値を持つ. A の最大の実固有値を λ_1 とする.
- λ_1 の固有ベクトルで非負ベクトルであるものが存在する.
- A の任意の固有値 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ について $|\lambda_i| \leq \lambda_1$.

正の正方行列に対するものがふつうの Peron-Frobenius の定理.

固有値 1 の存在

転置確率行列は 固有値 1 を持つ.

証明

分布の時間発展 I

L10-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の時間発展)

状態空間 $\{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列は

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- ❶ 初期分布 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(1)$ を求めよう.
- ❷ 定常分布をすべて求めよう.
- ❸ 上の初期分布のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ❹ 上の初期分布のとき極限分布 $\vec{p}(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t)$ と収束の様子 $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を調べよう.
- ❺ 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

