

マルコフ連鎖の時間発展・極限分布・周期的・可約なマルコフ連鎖

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学大学院 先端理工学研究科 数理・情報科学コース

計算科学特論 L11(2025-12-03 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2025-12-03 Wed 08:21 JST hig"

今日の目標

- マルコフ連鎖の時間発展を計算できる
- マルコフ連鎖の定常分布, 極限分布を説明できる



ここまで来たよ

10 確率過程・マルコフ連鎖

11 マルコフ連鎖の時間発展・極限分布・周期的・可約なマルコフ連鎖

- マルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展
- 一般の場合: 可約なマルコフ連鎖
- 一般の場合: 周期的なマルコフ連鎖

定義 (マルコフ連鎖の極限分布)

転置推移確率行列 M と初期分布 $\vec{p}(0)$ の定めるマルコフ連鎖 $\vec{p}(t)$ に対して, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t) =: \vec{p}(\infty)$ が存在するとき, これを**極限分布** という.

意味 自分の言葉でどうぞ

分布の時間発展 I

L11-Q1

Quiz(マルコフ連鎖の時間発展)

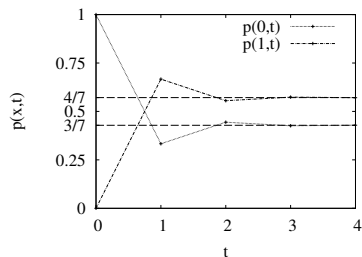
状態空間 $\{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列は

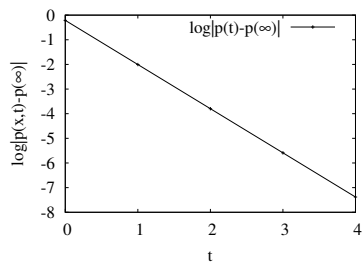
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- ❶ 初期分布 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(1)$ を求めよう.
- ❷ 定常分布をすべて求めよう.
- ❸ 上の初期分布のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ❹ 上の初期分布のとき極限分布 $\vec{p}(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t)$ と収束の様子 $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を調べよう.
- ❺ 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

このマルコフ連鎖では、 $t \rightarrow +\infty$ で

自分の言葉で





L11-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の定常分布と時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $\{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

なお, M の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを使ってよい.

- ① 定常分布をすべて求めよう.
- ② 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ③ 上のとき, $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を $t \rightarrow +\infty$ で 1 次関数で近似しよう.

単純な場合でのマルコフ連鎖の時間発展 I

状態空間 $S = \{0, 1, \dots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖.

転置推移確率行列 M の固有値固有ベクトル $\lambda_i, \vec{u}_i$ ($i = 1, \dots, m$).

仮定

絶対値の大きさの順に並べると (第 1, 第 2, ..., 第 m 固有値とよぶ) 次のようになっているとする.

$$1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m| \geq 0.$$

このとき, $\vec{u}_1$ は確率ベクトルにとれて, 解は,

$$\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 \lambda_2^t + a_3 \vec{u}_3 \lambda_3^t + \dots + a_m \vec{u}_m \lambda_m^t.$$

$$\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 \lambda_2^t + a_3 \vec{u}_3 \lambda_3^t + \cdots + a_m \vec{u}_m \lambda_m^t.$$

この単純な場合の性質

- 第1固有値は1. 転置推移確率行列の固有値には、いつでも1が含まれることを示したのだった.

先週の証明

- 第1固有ベクトル $\vec{u}_1$ は 定常分布.

ペロン-フロベニウスの定理

- 極限分布 $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t) = \vec{u}_1$. 自分の言葉でどうぞ

ちなみに、極限分布が存在するなら、それは必ず定常分布. なぜなら
自分の言葉でどうぞ

この単純な場合の性質の続き

- 第2以降の固有値の絶対値が1より小なので **自分の言葉でどうぞ**
第2固有値の絶対値が小ささが、極限分布への収束の速さを決める
- 第2以降の固有ベクトルは **自分の言葉でどうぞ**

これは単純な場合で、一般にはそうでない場合もある

- 単純である＝**既約** (可約でない) かつ **非周期的**
- 単純でない一般的な場合＝**可約**または**周期的**

ここまで来たよ

10 確率過程・マルコフ連鎖

11 マルコフ連鎖の時間発展・極限分布・周期的・可約なマルコフ連鎖

- マルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展
- 一般の場合: 可約なマルコフ連鎖
- 一般の場合: 周期的なマルコフ連鎖

マルコフ連鎖での母期待値の計算

定義 $p(x, t) = P(X(t) = x)$ から,

$$\begin{aligned} E[\phi(X(t))] &= \sum_x \phi(x) f(x) = \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) p(x, t) \\ &= \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) (M^t \vec{p}(0))_x \\ &= (\phi(0) \phi(1) \cdots \phi(m-1)) M^t \vec{p}(0) \end{aligned}$$

母比率もこのりで.

L11-Q3

Quiz(マルコフ連鎖の母期待値の時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ, 状態空間 $S = \{x\} = \{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

初期分布を $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする

- ① 母期待値 $E[e^{X(t)}]$ を求めよう.
- ② 各 $t \geq 0$ に対して, 条件 $X(t) > 0$ が成立する母比率を求めよう.

ここまで来たよ

10 確率過程・マルコフ連鎖

11 マルコフ連鎖の時間発展・極限分布・周期的・可約なマルコフ連鎖

- マルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展
- 一般の場合: 可約なマルコフ連鎖
- 一般の場合: 周期的なマルコフ連鎖

一般の場合 1: 可約なマルコフ連鎖 I

L11-Q4

Quiz(可約なマルコフ連鎖の定常分布と時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- ❶ $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ❷ $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ❸ 推移図を書こう.

Hint. 固有値 $\lambda = 1$ (重解), $\frac{1}{3}$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 使用可.

既約 (irreducible) なマルコフ連鎖=可約でないマルコフ連鎖

どの状態からどの状態へも、確率 > 0 の矢印をたどって到達できるとき、マルコフ連鎖は (推移確率行列は) **既約** であるという。既約でないとき、**可約** であるという。可約なとき、複数の定常分布が存在する。極限分布は初期分布に依存する。

可約なマルコフ連鎖は、既約なマルコフ連鎖に‘分割して’考察すればよい。

ここまで来たよ

10 確率過程・マルコフ連鎖

11 マルコフ連鎖の時間発展・極限分布・周期的・可約なマルコフ連鎖

- マルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展
- 一般の場合: 可約なマルコフ連鎖
- 一般の場合: 周期的なマルコフ連鎖

一般の場合 2: 周期的なマルコフ連鎖 I

L11-Q5

Quiz(周期的な状態のあるマルコフ連鎖の定常分布と時間発展)

状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列 M は次.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 定常分布をすべて求めよう.
- 2 任意の初期分布は定常分布に近づくか考えよう.
- 3 推移図を描こう.

Hint: $\lambda_j = \omega^j = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^j$ ($j = 0, 1, 2$) 固有ベクトル
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} s$

周期的な状態

$k > 1$ 回おきにしか自分に戻ってこない状態. 周期的な状態があると, 絶対値 1 の固有値が複数ある. このとき, 初期分布によっては極限分布がないことがある.

- 単純な場合=既約 (可約でない) かつ非周期的
- 一般の場合=可約または周期的

L11-Q6

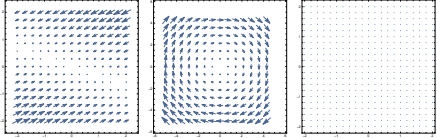
Quiz(周期的な状態のあるマルコフ連鎖の定常状態と時間発展)

次の転置推移確率行列をもつ, 状態空間 $S = \{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ① マルコフ連鎖の定常分布を求めよう.
- ② $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?
- ③ $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?

常微分方程式系とマルコフ連鎖☆

常微分方程式系	数理モデル II	マルコフ連鎖	計算科学
$\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = A\vec{p}(t)$		$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$ $\vec{p}(t) - \vec{p}(t-1) = (M - E)\vec{p}(t-1)$	
$\vec{p}(t) = e^{At}\vec{p}(0)$ $(e^A)^t$		$\vec{p}(t) = M^t\vec{p}(0)$ $(e^{M-E})^t \simeq (E + (M - E))^t = M^t.$	
A の固有値 θ の実部が 0 $\theta = a + bi$		M の固有値 $\lambda = e^\theta$ の絶対値が 1 $\lambda = e^\theta = e^{a+bi}$	
			典型的, 周期的, 可約