

正規分布の母数のベイズ推定

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学大学院 先端理工学研究科 数理・情報科学コース

計算科学特論 L04(2026-05-11 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-08-06 Thu 08:42 JST hig"

今日の目標

- 正規分布の母平均値をベイズ推定できる
- 正規分布の共役分布がまた正規分布であることを説明できる



L03-Q1

TA Prob and Sol: ベータ分布

$\Theta \sim \text{beta}(a, b)$ のとき, すなわち, 確率密度関数が

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

のとき, 次を示そう.

- ① $E[\Theta] = \frac{a}{a+b}.$
- ② $V[\Theta] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$
- ③ Θ の最頻値は $\frac{a-1}{(a-1)+(b-1)}.$

略解

①

$$\begin{aligned}
 E[\Theta] &= \int_0^1 \theta \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} d\theta \\
 &= \frac{a}{a+b} \times \int_0^1 \frac{\Gamma(a+1b)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b)} \theta^{(a+1)-1} (1-\theta)^{b-1} d\theta = \frac{a}{a+b}.
 \end{aligned}$$

② $V[\Theta] = E[\Theta^2] - E[\Theta]^2$. $E[\Theta^2]$ は $E[\Theta]$ と同様に.

③ $f'(\theta) = 0$ を θ について解く.

L03-Q2

TA Prob and Sol: 区分的線形な事後確率密度のベイズ MAP, EAP, MED 推定

ベイズ推定の結果，パラメタ y の事後確率密度が次の分布で与えられた．

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(1 - |y + 1|) & (-2 < y \leq 0) \\ \frac{4}{5}(1 - |y - 1|) & (0 < y \leq 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- ① Y をベイズ MAP 推定しよう．
- ② Y をベイズ EAP 推定しよう．
- ③ Y をベイズ MED 推定しよう．

略解

L03-Q3

TA Prob and Sol: 母比率の区間推定

選挙で出口調査をしたところ、50 人中 35 人が A 候補に投票したと答えた。母集団を投票した人 2500 人とする。そのうち A 候補に投票した人の母比率 (得票率) を考える。

- ① A 候補の得票率を、(点) 推定しよう
- ② A 候補の得票率を、信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう。
- ③ A 候補の得票率を、信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう。

略解

A 候補に投票したを $X = 1$, しなかったを $X = 0$ とすると、母比率を p として $X \sim \text{Ber}(p)$.

- ① 標本比率は $\hat{p} = \frac{35}{50} = 0.7$. 母比率 p を 0.7 と推定する。

- ② 母比率 p の信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ の信頼区間は,

$$\frac{35}{50} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} < p < \frac{35}{50} + \Phi^{-1}\left(\frac{0.05}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}}$$

$$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0.05}{2}\right) = z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96 \text{ より}$$

$$\frac{35}{50} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} < p < \frac{35}{50} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}}$$

$$0.7 - 0.13 < p < 0.7 + 0.13$$

$$0.57 < p < 0.83$$

0.5 < 0.57 なので、信頼係数 0.95 では当選ってことですね（放送用語「当選確実」こののりで判定を繰り返すと、20 回に 1 回に間違えるということ）

- ③ 母比率 p の信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ の信頼区間は,

$$\frac{35}{50} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.01}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} < p < \frac{35}{50} + \Phi^{-1}\left(\frac{0.01}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}}$$

$$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.01}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0.01}{2}\right) = z_{\frac{0.01}{2}} = 2.58 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{35}{50} - 2.58 \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} < p < \frac{35}{50} + 2.58 \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} \\ 0.7 - 0.17 < p < 0.7 + 0.17 \\ 0.53 < p < 0.87 \end{aligned}$$

L03-Q4

TA Prob and Sol: 区分的線形な事後確率密度の信用区間と最高事後密度領域

ベイズ推定の結果，パラメタ y の事後確率密度が次の分布で与えられた．

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(1 - |y + 1|) & (-2 < y \leq 0) \\ \frac{4}{5}(1 - |y - 1|) & (0 < y \leq 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

- ① Y の（左右対称の） $1 - \alpha = 0.95$ ベイズ信用区間=CI を求めよう．
- ② Y の $1 - \alpha = 0.95$ 最高事後密度領域=HPD 領域=HDI を求めよう．

略解

- ① $P(y \leq \ell) = P(y \geq u) = \alpha$ となるように定めて， $-\frac{6}{4} \leq y \leq \frac{7}{4}$ ．

- ② 最高密度を $d(\leq \frac{1}{5})$ とおくと, $f(y) \leq d$ となる y の領域は $D = [-2 + 5d, -5d] \cup [\frac{5}{4}d, 2 - \frac{5}{4}d]$.

$$1 - \alpha = P(y \in D) = 1 - 5d^2 - \frac{5}{4}d^2 \text{ を解くと, } d = \frac{1}{5}\alpha^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{25}.$$

よって, $D = [-2 + \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}] \cup [+\frac{\sqrt{5}}{20}, 2 - \frac{\sqrt{5}}{20}]$.

L03-Q5

TA Prob and Sol: ベルヌイ分布の事後予測分布

確率変数 X は, パラメタ y のベルヌイ分布 $B(1, y)$ にしたがう.
 Y の事前分布 を $\text{beta}(1, 1)$ とする.

確率変数 X の標本 $x_1, \dots, x_N$ を得て, $\sum_i x_i = k$ だった.

- ① ベイズ事後分布を求めよう.
- ② ベイズ事後予測分布を求めよう.

略解

- ① $\text{beta}(k + 1, N - k + 1)$.
- ② $f(\tilde{x}) = \begin{cases} 1 - f(1) & (\tilde{x} = 0) \\ \text{E}[Y|X] = \frac{k+1}{N+2} & (\tilde{x} = 1) \end{cases}$

ここまで来たよ

3 共役事前分布・母数の区間推定

4 正規分布の母数のベイズ推定

- 頻度主義での正規分布の母平均値の推定・予測
- 正規モデル（母分散固定）のベイズ推定
- 正規モデル（母平均値，母分散パラメタ）

頻度主義での正規分布の母平均値の推定・予測

確率統計 I(2023)L??

ドーナツ製造機は、母平均値 μ g, 母分散 σ^2 g² の正規分布にしたがう質量 x g のドーナツを作り出す. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. σ^2 はなぜか既知.

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

測定値 $x_1, \dots, x_N$ が得られた. μ を推定したい.

μ の点推定 標本平均値 $\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + \dots + x_N)$.

μ の区間推定

信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間 (Φ は標準正規分布の累積分布関数)

$$\bar{x} - \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})\sqrt{\sigma^2/N} < \mu < \bar{x} + \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})\sqrt{\sigma^2/N}.$$

次の値 $\tilde{x}$ の予測分布 $f(\tilde{x}|\bar{x}, \sigma^2)$.

$\mu \neq \mu_0$ を対立仮説とする有意水準 α の両側検定

標本平均値が棄却域 $\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{N}} > \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$ に入れば, $\mu \neq \mu_0$ と結論

$\mu > \mu_0$ を対立仮説とする有意水準 α の片側検定

標本平均値が棄却域 $\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{N}} > \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ に入れば, $\mu > \mu_0$ と結論

ここまで来たよ

3 共役事前分布・母数の区間推定

4 正規分布の母数のベイズ推定

- 頻度主義での正規分布の母平均値の推定・予測
- 正規モデル（母分散固定）のベイズ推定
- 正規モデル（母平均値，母分散パラメタ）

正規モデル（母平均値パラメタ）

モデル＝条件付き確率＝尤度

ドーナツ製造機は、母平均値 μ g, 母分散 σ^2 g² の正規分布にしたがう質量 x g のドーナツを作り出す. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ が、確率変数と見なす母数（これまで Y と呼んでいた）. σ^2 は固定して定数と思う.

共役分布は、各測定値 x_i の同時分布を「 μ の分布としてみたもの」になりそう…また正規分布じゃん.

μ の事前分布を、 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ としてみる.

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

μ_0, σ_0 は、母数の分布を決める母数、という意味で、hyper-parameter(超母数)と呼ばれることがある（特に機械学習や情報統計力学で）.

標本 $x_1, \dots, x_N$.
 μ の事後分布は

$$\begin{aligned} f(\mu|x_1, \dots, x_N) &= \frac{f(x_1, \dots, x_N|\mu)f(\mu)}{\int f(x_1, \dots, x_N|\mu)f(\mu) \mathrm{d}\mu} \\ &= \frac{1}{Z} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_i (x_i - \mu)^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \end{aligned}$$

Z は全確率が 1 になるための因子. $x_1, \dots, x_N$ の周辺分布.

計算 μ のどんな分布？

L04-Q1

Quiz(正規分布の母平均値のベイズ推定)

確率変数 X は、正規分布にしたがう。すなわち、

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

母数 μ の事前分布を次として、 μ のベイズ推定を考える。

$$f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}.$$

- ① X のサイズ 1 の標本として、 x_1 が得られたとき、 μ の事後分布を求めよう。 μ の母平均値, 母分散を求めよう。
- ② X のサイズ 2 の標本として、 x_1, x_2 が得られたとき、 μ の事後分布を求めよう。 μ の母平均値, 母分散を求めよう。

$$\mu|X \sim N\left(\frac{\sigma_0^{-2}\mu_0 + N\sigma^{-2}\frac{1}{N}\sum_i x_i}{\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2}}, (\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2})^{-1}\right)$$

たしかに共役事前分布だった！

事後分布の解釈

分散

$$V[\mu]^{-1} = \sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2}.$$

$\sigma^{-2} = 1/\text{分散}$ を分布の**精度** (precision) とでも呼んだ方がイメージがわき、式も簡単になる．大きい方が位置の正確な指定になっている．

解釈：事後分布の精度は、事前分布の精度と、条件付き分布の精度の合計になっている．

EAP

$$E[\mu] = \frac{\sigma_0^{-2}}{\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2}} \mu_0 + \frac{N\sigma^{-2}}{\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2}} \frac{1}{N} \sum_i x_i.$$

解釈：事後分布の母平均値は、事前分布の母平均値と、観測値の標本平均値の、重み（精度で）つき平均になっている．

L04-Q2

Quiz(正規分布の母平均値のベイズ推定)

あるドーナツ屋さんの作るオールドファッションドーナツの重さ X (g) は、未知の母平均値 μ g, 既知の標準偏差 3 g の正規分布 $N(\mu, 3^2)$ にしたがう. 母平均値 μ の事前分布は, $N(100, 5^2)$ g と考えている. オールドファッションドーナツ 10 個の重さを測定したところ, 標本平均値は 102 g だった.

- ① μ の事後分布を求めよう (改めて積分しなくても, 共役事前分布についての「公式」を使ってよい)
- ② μ を MAP 推定しよう.
- ③ μ を EAP 推定しよう.
- ④ μ の, 信頼係数 0.95 の HPD を求めよう.
- ⑤ μ が 100 より大きい確率を求めよう.
- ⑥ μ を MLE 推定 (最尤推定) しよう.

正規分布の再生性

確率変数 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ が独立のとき,
和の確率変数 $S = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

モーメント母関数を使うと楽に 確率統計 II(2024)L??, 使わなくてもローテクな
直接計算で証明できる.

事後予測分布 (正規モデル (分散固定))

事前分布 $\mu \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, 観測値 $x_1, \dots, x_N$ のもとでの.

$$\begin{aligned} f_{\tilde{x}|x\dots}(\tilde{x}|x_1, \dots, x_N) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\tilde{x}, \mu|x\dots}(\tilde{x}, \mu|x_1, \dots, x_N) d\mu \\ &= \int_0^{+\infty} f_{x|\mu}(\tilde{x}|\mu) \times f_{\mu|x\dots}(\mu|x_1 \dots, x_N) d\mu \end{aligned}$$

$\tilde{X} - \mu \sim N(0, \sigma^2)$ (モデル),

$\mu \sim N(\bullet, \bullet)$ (上で求めた),

これらは独立で, それぞれ正規分布にしたがうので, 正規分布の再生性より,

$$\tilde{X} = (\tilde{X} - \mu) + \mu \sim N\left(0 + \frac{\sigma_0^{-2}\mu_0 + N\sigma^{-2}\frac{1}{N}\sum_i x_i}{\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2}}, \sigma^2 + (\sigma_0^{-2} + N\sigma^{-2})^{-1}\right).$$

統計的仮説検定に相当する主張

事後確率が大きい仮説 H_1 を採用

$$\frac{\int_{y \in H_1} \text{事後分布 } dy}{\int_{y \in H_0} \text{事後分布 } dy} = \frac{\int_{y \in H_1} f_{X|Y}(x_1, \dots, x_N | y) f_Y(y) dy}{\int_{y \in H_0} f_{X|Y}(x_1, \dots, x_N | y) f_Y(y) dy} > 1$$

(分母の周辺確率は分母分子でキャンセルされる)

両側検定相当

$$P(|\mu - \mu_0| \leq \epsilon) = \int_{\mu_0 - \epsilon}^{\mu_0 + \epsilon} \text{事後分布 } d\mu$$

片側検定相当

$$P(\mu - \mu_0 > 0) = \int_{\mu_0}^{+\infty} \text{事後分布 } d\mu$$

ここまで来たよ

3 共役事前分布・母数の区間推定

4 正規分布の母数のベイズ推定

- 頻度主義での正規分布の母平均値の推定・予測
- 正規モデル (母分散固定) のベイズ推定
- 正規モデル (母平均値, 母分散パラメタ)

正規モデル (母分散パラメタ)

$$f_{x|\mu,\sigma}(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

母分散であれ, 母標準偏差であれ, 正の値のみをとる必要がある. 事前分布として, 次のような選択肢がある.

半正規分布

$Z \sim N(0, s^2)$ に対し, $y = |Z|$ の分布が半正規分布. 確率密度関数は

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-\frac{y^2}{2s^2}} & (y \geq 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

s が hyper-parameter. 事前情報がないとき, s 大で幅広く.

σ がこの分布にしたがうとき, σ^2 は自由度 1 のカイ二乗分布 χ_1^2 をスケール倍したものにしたがう.

$Z \sim N(0, 1^2)$ のとき, $Y = Z^2 \sim \chi_1^2$

半正規分布は, 正規分布の共役事前分布ではない.

定義 (ガンマ分布)

次の確率密度関数を持つ連続型確率変数 Θ を, パラメタ a, λ のガンマ分布 $\text{gamma}(a, \lambda)$ にしたがるという.

$$f(\theta|a, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-\lambda\theta} & (\theta > 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

指数分布は $\text{gamma}(1, \lambda)$, 自由度 n のカイ二乗分布は $\text{gamma}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

逆ガンマ分布

尤度の σ^2 依存性が, $\theta = 1/\sigma^2$ としたときのガンマ分布と同じである (σ^2 が逆ガンマ分布にしたがう, という) ことを考えると, 逆ガンマ分布が共役事前分布になっている.

逆ガンマ分布は, 以前は, 共役事前分布として重宝されていたが, 近年の, MCMC で数値的に求めれば, 共役分布でなくてもいいじゃん, 的のりでは, 半正規分布のほうが便利に使われている.

正規モデル（母平均値，母分散パラメタ）

母平均値の正規分布と，母分散の逆ガンマ分布を（独立でなく）「絡ませた」，正規-逆ガンマ分布という 2 次元の同時分布が共役事前分布になる．