

ランダムウォークの確率シミュレーションによる標本抽出

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L04(2020-04-22 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2020-05-05 Tue 07:44 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの到達点の座標の標本抽出ができる
- ランダムウォークの到達点の座標に関わる母期待値を推定できる



ここまで来たよ

- ランダムウォークの確率シミュレーションによる標本抽出
 - 確率シミュレーション

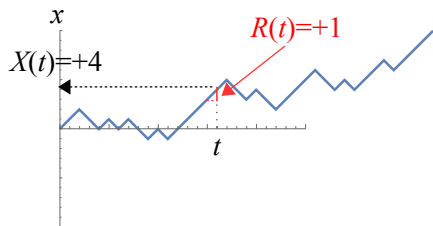
ランダムウォーク (確率過程の例)

ランダムウォーク

$$X(t) = X(t-1) + R(t), \quad X(0) = x_0$$

階差数列 $R(t)$: 独立同分布にしたがう確率変数.

ランダムウォーカー座標 $X(t)$: 確率変数.



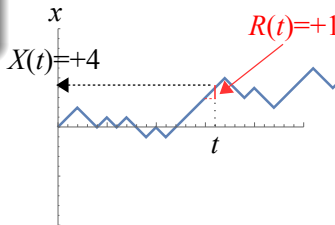
ランダムウォークの座標の母期待値, 母比率は?

$R(t)$ やランダムウォークの座標 $X(1000)$ は確率変数.

ありうる問 (確率)

(手計算で) 母ナントカを厳密に求めよう.

- 母平均値 $E[R(t)]$, 母期待値 $E[e^{R(t)}]$, 母比率 $P(R(t) > 1)$
- 母平均値 $E[X(1000)]$, 母期待値 $E[e^{X(1000)}]$, 母比率 $P(X(1000) > 1)$
- 母比率 $P(X(50) = 12 \text{ かつ } X(100) = 25)$



別のタイプの間 (推定)

$R(t)$ の確率分布 $f(x)$ の式を知らない (例:誰かが作った `getrandom` の中身不明) けど, Excel データ (標本) だけはあるとする. 母ナントカを推定したい.

母期待値・母平均値・母比率の推定

母期待値の推定

岩薩林 確率・統計 §7.1

確率統計☆演習 I(2019)L10

$$\text{標本期待値 } \overline{\phi(X)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(X^{(n)})$$

が母期待値 $E[\phi(X)]$ の‘よい’推定値になっている。

確率変数 $Y = \phi(X)$ の母平均値の推定と思おう。

母平均値の推定

岩薩林 確率・統計 §7.1

確率統計☆演習 I(2019)L10

$$\text{標本平均値 } \bar{X} = \frac{1}{N} (X^{(1)} + \dots + X^{(N)}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X^{(n)}$$

が、母平均値 $E[X]$ の‘よい’推定値になっている。

母比率の推定

岩薩林 確率・統計 §7.3 確率統計☆演習 I(2019)L10

X のサンプルのデータ N 個中 k 個が「条件... を満たす」とき,

$$\text{標本比率 } \hat{p} = \frac{k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_{[\dots]}(X^{(n)})$$

が母比率 $P(\text{「条件...」}) = E[I_{[\dots]}(X)]$ の‘よい’推定値になっている.

確率シミュレーションによる推定

確率シミュレーション

確率的現象を、擬似乱数を使ってそのままコンピュータ上で再現し (simulate), 繰り返して実行して標本 $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ を抽出して, 標本ナントカの式を Excel やプログラムで計算して, 母ナントカを推定する.

- いつでも推定はできちゃう
- 要 コンピュータ or 奴隷

最終的な誤差 = 統計誤差 + 数値計算誤差

数値計算法

対比されるコンピュータによる計算方法 (いま使わない)

母ナントカの公式 $E[X] = \sum_{x=1}^3 x f(x)$ をプログラムで計算する.

$f(x)$ が求まったら苦労しないよ

最終的な誤差 = 統計誤差 + 数値計算誤差

確率変数 $R(1)$ の標本

$R(1)^{(n)}$

$t = 1$:

(n) :

n	$t = 1$
1	$R(1)^{(1)}$, 改行
2	$R(1)^{(2)}$, 改行
\vdots	\vdots
N	$R(1)^{(N)}$, 改行

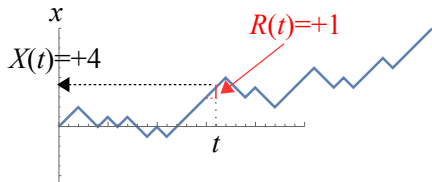
ランダムウォークの座標 $X(t)$ の標本

$X(t)^{(n)}$

t :

(n) :

	$t = 0$	$t = 1$	\dots	$t = T$
$n = 1$	$X(0)^{(1)},$	$X(1)^{(1)},$	\dots	$X(T)^{(1)},$ 改行
$n = 2$	$X(0)^{(2)},$	$X(1)^{(2)},$	\dots	$X(T)^{(2)},$ 改行
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n = N$	$X(0)^{(N)},$	$X(1)^{(N)},$	\dots	$X(T)^{(N)},$ 改行



$X(0), X(1), X(2), \dots, X(T)$ の標本を抽出するプログラム

```
1                                     /* 1*/
2  for (n=0;n<N;n++){
3                                     /* 2*/
4
5     for (t=1;t<=T;t++){
6                                     /* 3*/
7         x=x+getrandom (getuniform ());
8                                     /* 4*/
9     }
10                                     /* 5*/
11 }
12                                     /* 6*/
```

問: srand(seed), x=0, t=0, printf("%d, ", x) はどこ?

問: 他に何がいる?

標本期待値は Excel を使わなくても C の中でも計算できる!

$$\overline{\phi(X(T))} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(X(T)^{(n)})$$

```
1                                     /* 1*/
2  for (n) {
3                                     /* 2*/
4    for (t) {
5                                     /* 3*/
6      x=x+getrandom (getuniform ());
7                                     /* 4*/
8    }
9                                     /* 5*/
10 }
11                                     /* 6*/
```

sum1=0, sum1+=phi(x) (例 $\phi(x) = x^3$), printf("%f", (double)sum1/N)?

標本比率の C による計算

$\phi(x) = I_{[\text{条件}]}(x)$ に相当するに相当する phi は?

例で. $P(X > 10)$ を考えるとき,

$$I_{[x>10]}(x) = \begin{cases} 1 & (x > 10) \\ 0 & (x \geq 10) \end{cases}$$

↓

```
1 int phi(int x){
2     if(x>10){
3         return 1;
4     } else {
5         return 0;
6     }
```

そのままじゃん.

この場合, sum1 は と名付けたほうがいいかも.

以下は自習用, 考えてみる用の例題として載せてます.

Moodle の予習復習問題に, 「w04.pdf の L04-Q1 をやろう」みたいに書いてあるときだけ, 必須, 要提出です.

L04-Q1

Quiz(確率シミュレーション)

$t = 2$ に $x = 10$ から出発したランダムウォーカーが, $t = 20$ で, 領域 $x < 0$ にいる確率を推定して出力するプログラムを書こう. ただし,

$$X(t) = X(t - 1) + R(t)$$

で, `int getrandom(getuniform())` が独立同分布にしたがう確率変数 $R(t)$ を返すものとする. `main` と `phi` の中だけ書こう.

L04-Q2

Quiz(確率シミュレーション)

seed を与えられると, $t = 3$ に $x = 4$ から出発したランダムウォークが, $T = 10$ で $|X(T)| < 5$ である確率を推定して出力するプログラムを書こう. ただし,

$$X(t) = X(t-1) + R(t),$$

で, 独立同分布にしたがう確率変数 $R(t)$ を, `int` `getrandom(getuniform())` が返すものとして, `main` と `phi` の中だけ書こう.

予習復習問題のやり方+今後の予定

Note Math Moodle

<https://note.math.ryukoku.ac.jp/moodle>

Moodle App for iOS/Android



URL をきかれたら <https://note.math.ryukoku.ac.jp/moodle> で登録.

お知らせ

- 計算科学☆実習 B チーム 質問と相談チャンネル
- Math ラウンジチャンネル
- 樋口オフィスアワーチャンネル原則火 5