

マルコフ連鎖の時間発展

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L07(2020-05-20 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2020-05-22 Fri 13:20 JST hig"

今日の目標

- マルコフ連鎖の時間発展を求められる. さらに, 極限分布の有無, 収束の様子を説明できる
- マルコフ連鎖の状態に関する, 母期待値, 母比率を計算できる



L07-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の推移確率行列)

$x = 0, 1, 2, 3$ 上のランダムウォークを考える.

時刻 $t = 0$ に $x = 1$ から出発する. 時刻 t に x にいたウォーカーは,

- 確率 $\frac{1}{7}$ で $x - 1$ に移動し
- 確率 $\frac{2}{7}$ で $x + 1$ に移動し
- 確率 $\frac{4}{7}$ で x にとどまる

ただし, 上のルールで, $x = 0$ から $x = -1$ や, $x = 3$ から $x = 4$ に移動しようとしたときは, 元の x にとどまるものとする.

これをマルコフ連鎖としてとらえたとき,

- ① 推移図を書こう.
- ② 転置推移確率行列を書こう.
- ③ 時刻 $t = 0$ における分布 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき, $\vec{p}(1)$ を求めよう.

ここまで来たよ

6 マルコフ連鎖

7 マルコフ連鎖の時間発展

- マルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展
- 一般の場合: 可約なマルコフ連鎖, 周期的なマルコフ連鎖

分布の時間発展 I

L07-Q1

Quiz(マルコフ連鎖の時間発展)

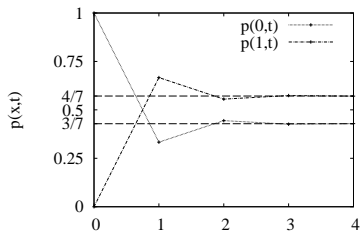
状態空間 $\{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列は

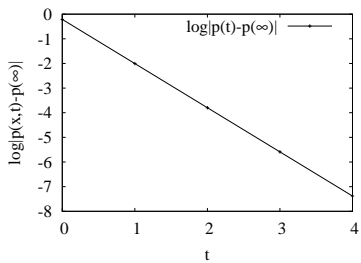
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- ① 初期分布 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(1)$ を求めよう.
- ② 定常分布をすべて求めよう.
- ③ 上の初期分布のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ④ 上の初期分布のとき極限分布 $\vec{p}(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t)$ と収束の様子 $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を調べよう.
- ⑤ 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

極限分布

(存在するなら) $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t)$ を極限分布という.





L07-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の定常分布)

次の転置推移確率行列を持つ状態空間 $\{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

なお, M の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを使ってよい.

- 1 定常分布をすべて求めよう.
- 2 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- 3 上のとき, $\log |\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ の $t \rightarrow +\infty$ の振る舞いを求めよう.

単純な場合でのマルコフ連鎖の時間発展 I

状態空間 $S = \{0, 1, \dots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖.

転置推移確率行列 M の固有値固有ベクトル λ_i, \vec{u}_i ($i = 1, \dots, m$).

仮定

絶対値の大きさの順に並べると (第 1, 第 2, ..., 第 m 固有値とよぶ) 次のようになっているとする.

$$1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m| \geq 0.$$

このとき, \vec{u}_1 は確率ベクトルにとれて, 解は,

$$\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 \lambda_2^t + a_3 \vec{u}_3 \lambda_3^t + \dots + a_m \vec{u}_m \lambda_m^t.$$

$$\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 \lambda_2^t + a_3 \vec{u}_3 \lambda_3^t + \cdots + a_m \vec{u}_m \lambda_m^t.$$

この単純な場合の性質

- 第1固有値は1. 転置推移確率行列の固有値には、いつでも1が含まれることを示したのだった.

先週の証明

- 第1固有ベクトル \vec{u}_1 は .

ペロン-フロベニウスの定理

- 極限分布 $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t) = \vec{u}_1$.

ちなみに、極限分布が存在するなら、それは必ず定常分布. なぜなら

この単純な場合の性質の続き

- 第 2 以降の固有値の絶対値が 1 より小なので



限分布への収束の速さを決める

第 2 固有値の絶対値が小ささが、極

- 第 2 以降の固有ベクトルは



これは単純な場合で、一般にはそうでない場合もある

- 単純である = 既約 (可約でない) かつ 非周期的
- 単純でない一般的な場合 = 可約 または 周期的

ここまで来たよ

6 マルコフ連鎖

7 マルコフ連鎖の時間発展

- マルコフ連鎖の時間発展
- **マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展**
- 一般の場合: 可約なマルコフ連鎖, 周期的なマルコフ連鎖

マルコフ連鎖での母期待値の計算

定義 $p(x, t) = P(X(t) = x)$ から,

$$\begin{aligned} E[\phi(X(t))] &= \sum_x \phi(x) f(x) = \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) p(x, t) \\ &= \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) (M^t \vec{p}(0))_x \\ &= (\phi(0)\phi(1)\cdots\phi(m-1)) M^t \vec{p}(0) \end{aligned}$$

母比率もこののりで.

L07-Q3

Quiz(マルコフ連鎖の母期待値の時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ, 状態空間 $S = \{x\} = \{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

初期分布を $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする

- 1 母期待値 $E[e^{X(t)}]$ を求めよう.
- 2 条件 $X(t) > 0$ が成立する母比率を求めよう.

ここまで来たよ

6 マルコフ連鎖

7 マルコフ連鎖の時間発展

- マルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖での母期待値母比率の時間発展
- 一般の場合:可約なマルコフ連鎖, 周期的なマルコフ連鎖

一般の場合 1:可約なマルコフ連鎖 I

L07-Q4

Quiz(可約なマルコフ連鎖の定常状態)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- ① $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ② $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ③ 推移図を書こう.

Hint. 固有値 $\lambda = 1$ (重解), $\frac{1}{3}$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 使用可.

既約 (irreducible) なマルコフ連鎖=可約でないマルコフ連鎖

どの状態からどの状態へも, 確率 > 0 の矢印をたどって到達できるとき, マルコフ連鎖は (推移確率行列は) **既約** であるという. 既約でないとき, **可約** であるという. 可約なとき, 複数の定常分布が存在する. 極限分布は初期分布に依存する.

可約なマルコフ連鎖は, 既約なマルコフ連鎖に '分割して' 考察すればよい.

一般の場合 2:周期的なマルコフ連鎖 I

L07-Q5

Quiz(マルコフ連鎖)

状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列 M は次.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 定常分布をすべて求めよう.
- 2 任意の初期分布は定常分布に近づくか考えよう.
- 3 推移図を描こう.

Hint: $\lambda_j = \omega^j = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^j$ ($j = 0, 1, 2$) 固有ベクトル
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} s, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} s$

周期的な状態

$k > 1$ 回おきにしか自分に戻ってこない状態. **周期的**な状態があると, 絶対値 1 の固有値が複数ある. このとき, 初期分布によっては極限分布がないことがある.

- 単純な場合=**既約** (可約でない) かつ **非周期的**
- 一般の場合=**可約** または **周期的**

L07-Q6

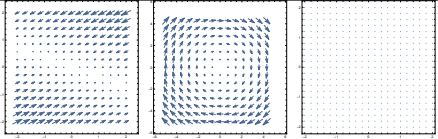
Quiz(周期的なマルコフ連鎖の定常状態)

次の転置推移確率行列をもつ, 状態空間 $S = \{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 マルコフ連鎖の定常分布を求めよう.
- 2 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?
- 3 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?

常微分方程式系とマルコフ連鎖☆

常微分方程式系	数理モデル II	マルコフ連鎖	計算科学
$\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = A\vec{p}(t)$		$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$	
$\vec{p}(t) = e^{At}\vec{p}(0)$ $(e^A)^t$		$\vec{p}(t) - \vec{p}(t-1) = (M-E)\vec{p}(t-1)$	
$\vec{p}(t) = e^{At}\vec{p}(0)$ $(e^A)^t$		$\vec{p}(t) = M^t\vec{p}(0)$ $(e^{M-E})^t \simeq (E + (M-E))^t = M^t.$	
A の固有値 θ の実部が ≤ 0 $\theta = a + bi$		M の固有値 $\lambda = e^\theta$ の絶対値が ≤ 1 $\lambda = e^\theta = e^{a+bi}$	
			典型的, 周期的, 可約