逆関数法による乱数の生成

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L13(2020-07-01 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2020-06-27 Sat 15:10 JST hig"

今日の目標

- 逆関数法で, 一様分布以外の連続型確率変数の乱数が生成できる
- いろいろな処理系で, いろいろな確率分布にしたがう乱数が生成する方法を探せる

L12-Q2

Quiz 解答:確率変数の変換

$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 1 & (0 \le y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$ なので,

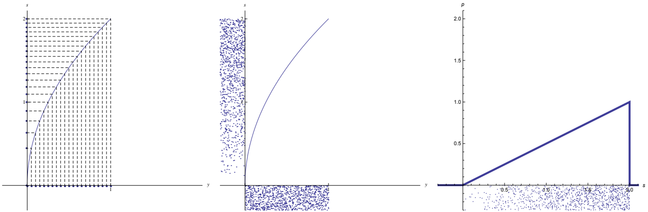
1.
$$\mathrm{E}[R] = \mathrm{E}[2\sqrt{Y}] = \int_0^1 2\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \tfrac{4}{3}.$$
$$\mathrm{V}[R] = \mathrm{E}[R^2] - (\mathrm{E}[R])^2 = \mathrm{E}[4Y] - (\tfrac{4}{3})^2 = 2 - (\tfrac{4}{3})^2$$
2. $R = 2\sqrt{Y}$ を解くと, $y = (r/2)^2$ $(0 \le y < 1, 0 \le r < 2)$ なので,
$P(0.2 < R < 0.8) = P(0.01 < Y < 0.16) = 0.15.$
3.
$$P(R < r) = P(Y < (r/2)^2) = \begin{cases} 0 & (r < 0) \\ r/2 & (0 \le r < 2) \\ 1 & (2 \le r) \end{cases}$$

4.

$$F_{\mathrm{R}}(r) = \int_0^r f_{\mathrm{R}}(s)\,\mathrm{d}s = (r/2)^2 \quad (0 \leq r < 2)$$

より，両辺を微分して，

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} r/2 & (0 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



L13-Q3

Quiz 解答:確率変数の変換

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 1 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$ なので，

1.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[R] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{Y}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{y} f_{\mathrm{Y}}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{y} \cdot 0\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{y} \cdot 1\,\mathrm{d}y + \int_{1}^{+\infty} \mathrm{e}^{y} \cdot 0\,\mathrm{d}y \\
&= 0 + (\mathrm{e}^{1} - 1) + 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}[R] &= \mathrm{E}[R^2] - (\mathrm{E}[R])^2 \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{e}^{2Y}] - (\mathrm{E}[\mathrm{e}^{Y}])^2 \\
&= \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{2y} \cdot 1\,\mathrm{d}y - (\mathrm{e}^{1} - 1)^2 \\
&= 0 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2} - 1) - (\mathrm{e}^{1} - 1)^2
\end{aligned}
$$

2. $r \leq 1$ のとき, $P(R < r) = 0$.
   $1 < r < \mathrm{e}$ のとき,

$$
\begin{aligned}
P(R < r) =& P(Y < \log r) = \mathrm{E}[\mathrm{I}_{[\log Y < r]}(Y)] \\
=& \int_{-\infty}^{\log r} f_{\mathrm{Y}}(y)\,\mathrm{d}y = \log r
\end{aligned}
$$

   $\mathrm{e} \leq r$ のとき, $P(R < r) = 1$ よって,

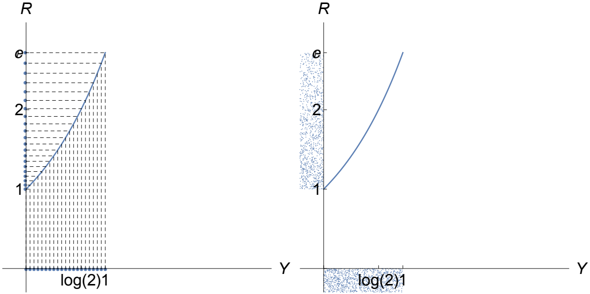
$$
F_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} 0 & (r < 1) \\ \log r & (1 \leq r < \mathrm{e}) \\ 1 & (\mathrm{e} \leq r) \end{cases}
$$

3.

$$\int_{-\infty}^{r} f_{\mathrm{R}}(r)\,\mathrm{d}r = F_{\mathrm{R}}(r)$$

より, 両辺を微分して,

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} 1/r & (1 \leq r < \mathrm{e}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



L13-Q4

Quiz 解答:確率変数の変換

ここまで来たよ

13

14 逆関数法による乱数の生成

- 逆関数法による乱数生成
- 標準正規分布にしたがう乱数の生成

確率変数の関数

確率密度関数の変換のおぼえ方

R, Q を確率変数, $f_{\mathrm{R}}, f_{\mathrm{Q}}$ を確率密度変数, $r = g(q)$ を単調増加な関数とするとき, $f_{\mathrm{Q}}(q)\,\mathrm{d}q$ は変数変換しても不変: $f_{\mathrm{R}}(r)\,\mathrm{d}r = f_{\mathrm{Q}}(q)\,\mathrm{d}q$

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}(q)} f_{\mathrm{Q}}(q)$$

$$P(R < g(q)) = \int_{-\infty}^{g(q)} f_{\mathrm{R}}(r)\,\mathrm{d}r = \int_{-\infty}^{q} f_{\mathrm{Q}}(q)\,\mathrm{d}q = P(Q < q)$$

逆関数法

$R, Q = Y \sim \mathrm{U}(0,1)$ について, 上の式を解いて求めた $r = g(y)$ を使うと, ほしい確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ にしたがう R を, 連続型一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ にしたがう Y から変換して生成できる.

L13-Q1

Quiz(逆関数法)

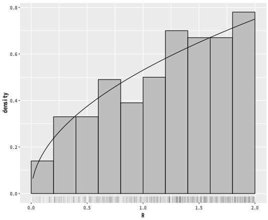
確率密度関数

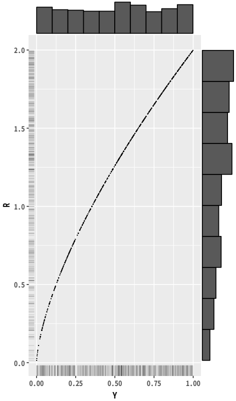
$$f_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{r} & (0 \le r < 2) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

に従う確率変数 R に対応する乱数を, $[0, 1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

```
double getrandom(double y){
  return 2*pow(y,2.0/3);
}
```

出力





L13-Q2

Quiz(逆関数法)

確率密度関数

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (2 \le r < 5) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数 R に対応する乱数を, $[0,1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

L13-Q3

Quiz(逆変換法による擬似乱数生成)

次の確率密度関数

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} -\frac{200}{21}\frac{1}{r^3} & (-5 \leq r < -2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う確率変数 R に対応する乱数を, $[0,1)$ 一様乱数 y から, 単調増加な $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

ここまで来たよ

13

14 逆関数法による乱数の生成
- 逆関数法による乱数生成
- 標準正規分布にしたがう乱数の生成

標準正規分布にしたがう乱数の生成

$Y \sim \mathrm{U}(0,1)$ から, $R = g(Y) \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ となる g が式で書けるといい. けどそんなうまい話はない. 正規分布の確率密度関数は '積分できない.'
高レベル言語 Python, R などでは, 正規分布にしたがう乱数を生成する, ハイテクでブラックボックスな関数が備わってるのでそれを利用.
他の分布も備わってる. 一様分布も `getuniform()` より**高品質**なものあり.

サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本

```
z<-rnorm(1000) # in R
```

サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本

```
import numpy # in Python
z=numpy.random.rand(1000)
```

サンプルサイズ 1 の標準正規分布にしたがう標本

```
norm.inv(rand(),0,1) // in Excel
```

正規乱数のブラックボックスな関数の中はどうなってるの?

Jacobian J

微積分 II

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad J = \frac{\partial x \partial y}{\partial u \partial v}.$$

直交座標と極座標の場合

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

2 変数正規分布

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

2 つの確率変数の間の関係もこれ $\to$ 2 対 2 の逆関数法

Box-Muller 法による標準正規乱数. 2 個セット

```
double r,theta,x,y;
r=getuniform();                /* U(0,1) */
theta=getuniform()*2*M_PI;  /* U(0,2Pi)*/
x=sqrt(-2*ln(r))*cos(theta);   /* N(0,1) */
y=sqrt(-2*ln(r))*sin(theta);   /* N(0,1) */
```