

ランダムウォークのサンプルパスの標本抽出

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L02(2021-04-15 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-04-15 Thu 13:34 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの座標を C で計算し, サンプルパスを Excel で描ける
- 標本から座標の母平均値を推定できる



L01-Q1

Quiz 解答:連続的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率(一様分布)

$$\textcircled{1} \quad E[\cos(\pi X)] = \int_{5/2}^3 2 \cos(\pi x) \, dx = \left[\frac{2}{\pi} \sin(\pi x) \right]_{5/2}^3 = -\frac{2}{\pi}$$

$$\textcircled{2} \quad P\left(\frac{22}{8} < X < \frac{23}{8}\right) = E[\mathbb{I}_{[\frac{22}{8} < X < \frac{23}{8}]}(X)] = \int_{22/8}^{23/8} 2 \, dx = \frac{1}{4}.$$

L01-Q2

Quiz 解答:擬似乱数の使いかた

ソースコード 1: 乱数

```
1 double getRandom(double y){
2     if(y<0.3){
3         return 0.4;
4     }
5     return 0.6;
6 }
```

L01-Q3

Quiz 解答:離散的な乱数の生成

```
1 int getRandom(double y){
2     if(y<2.0/8.0){
3         return 1;
4     } else if (y<(2.0+1.0)/8.0){
5         return 2;
6     } else {
7         return 3;
8     }
9 }
```

L01-Q4

Quiz 解答:期待値

```
1 int getRandom(double y){
2     if(y<2/13.0){
3         return 0;
4     } else if (y<(2+4)/13.0){
5         return 3;
6     } else {
7         return 4;
8     }
9 }
```

値 $R = 3$ が返される確率の検算.

$$P(R = 3) = P(Y < 2/13 \text{ でない かつ } Y < 6/13) = P(2/13 \leq Y < 6/13) = \int_{2/13}^{6/13} 1 \, dy = 4/13.$$

ここまで来たよ

2 ランダムウォークと離散型擬似乱数

2 ランダムウォークのサンプルパスの標本抽出

- ランダムウォークを記述する言葉
- ランダムウォークのサンプルパスの抽出
- 確率シミュレーションによる推定

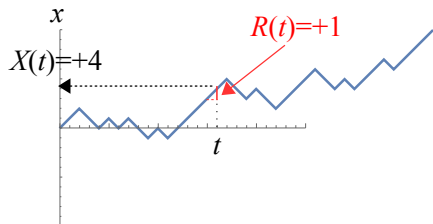
ランダムウォーク (確率過程の例)

確率変数 $X(t)$ がランダムウォークの座標 (数列 $\{X(t)\}$), 確率変数 $R(t)$ が独立同分布にしたがう (階差数列 $\{R(t)\}$)

$$\text{漸化式 } X(t) = X(t-1) + R(t) \quad (t = 1, 2, \dots), \quad \text{初項 } X(0) = a.$$

現象の数理 A

サンプルパス (標本道)



例.

$R(t)$	確率
+1	p
-1	$q (= 1 - p)$

岩薩林 確率・統計ベルヌーイ分布, $n = 1$ 二項分布 (p.66)

どうやってコンピュータで?

近いうちにこんな問題

L02-Q1

Quiz(確率シミュレーション)

$t = 6$ に $x = -5$ から出発したランダムウォーカーが、 $t = 20$ で、領域 $x < 0$ にいる確率を推定して出力するプログラムを書こう。ただし、

$$X(t) = X(t-1) + R(t)$$

で、`int getrandom(getuniform())` が独立同分布にしたがう確率変数 $R(t)$ を返すものとする。main と phi の中だけ書こう。

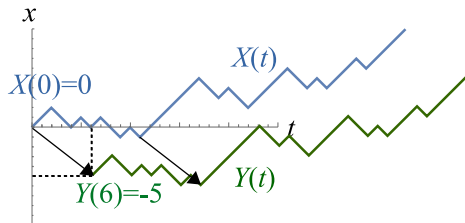
ランダムウォークの言葉づかいの習慣

$X(2)$: 初期条件, ランダムウォーカーの出発点 (を確率変数とみたもの)

- 「ランダムウォーカーが時刻 $t = 6$ に $x = -5$ から出発した」 \Leftrightarrow

$$P(X(6) = -5) = 1$$

- 「 $t = 20$ で $x < 0$ にいる確率」 $\Leftrightarrow P(X(20) < 0)$



サンプルパス

ここまで来たよ

2 ランダムウォークと離散型擬似乱数

2 ランダムウォークのサンプルパスの標本抽出

- ランダムウォークを記述する言葉
- ランダムウォークのサンプルパスの抽出
- 確率シミュレーションによる推定

確率変数 R の標本 $R^{(n)}$ (n) : サンプル内通し番号

n	
1	$R^{(1)}$, 改行
2	$R^{(2)}$, 改行
\vdots	\vdots
N	$R^{(N)}$, 改行

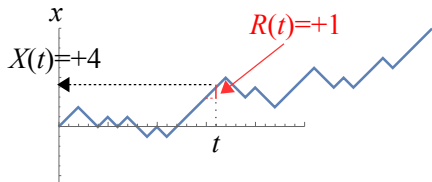
ランダムウォークの座標 $X(t)$ の標本

$X(t)^{(n)}$

t : 時刻, 数列の第 t 項

(n) : サンプル内通し番号

	$t = 0$	$t = 1$	\dots	$t = T$
$n = 1$	$X(0)^{(1)},$	$X(1)^{(1)},$	\dots	$X(T)^{(1)},$ 改行
$n = 2$	$X(0)^{(2)},$	$X(1)^{(2)},$	\dots	$X(T)^{(2)},$ 改行
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n = N$	$X(0)^{(N)},$	$X(1)^{(N)},$	\dots	$X(T)^{(N)},$ 改行

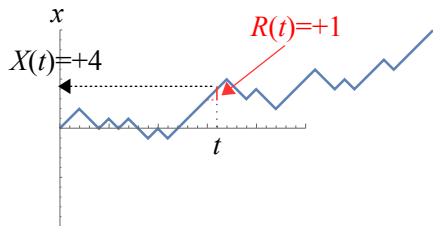


ランダムウォークの座標 $X(t)$ の標本 (標本サイズ 1)

まず, サンプルサイズ 1 で出力. $X(t)^{(1)}$

t : 時刻, 数列の第 t 項

$t = 0$	$t = 1$	\dots	$t = T$
$X(0)$,	$X(1)$,	\dots	$X(T)$, 改行



サンプルパス

C 言語で数列の計算

数列 $\{X(t)\}$ を定義の例.

数値計算法

漸化式 $X(t) = X(t-1) + R(t)$ ($t = 1, 2, \dots$), 初項 $X(0) = a$.

数列の計算と出力

```
1  int x, t;
2
3  t=0;
4  x=a;
5  printf("%d", x); /* t=0を特別扱い */
6  for (t=1; t<=100; t++){
7      x=x+R(t); /* X(t) を求めた */ /* R(t)階差数列 */
8      printf("%d", x);
9  }
10 printf("\n");
```

`int R(int t){return 3;}` なら $X(t)$ は初項 a 公差 3 の等差数列.

ランダムウォーク $X(0), X(1), \dots, X(T)$ のサイズ 1 の標本抽出

初項 $X(0) = a$.

```
1  
2  
3                               /* 2 */  
4  
5  
6  for ( t = 1; t <= T; t ++ ) {  
7  
8                               /* 3 */  
9    x = x + getrandom ( getuniform ( ) );  
10                               /* 4 */  
11  
12 }  
13                               /* 5 */
```

問: `srand(seed), x=a, t=0, printf("%d,", x)` はどこ?

ランダムウォーク $X(0), X(1), \dots, X(T)$ のサイズ N の標本抽出初項 $X(0) = a$.

```
1                                     /* 1 */
2  for (n=0;n<N;n++){
3                                     /* 2 */
4
5    for (t=1;t<=T;t++){
6                                     /* 3 */
7        x=x+getrandom(getuniform());
8                                     /* 4 */
9    }
10                                     /* 5 */
11 }
12                                     /* 6 */
```

解説動画



https:
//www.youtube.
com/watch?v=
H-sIaVJmeiA

問: `srand(seed), x=a, t=0, printf("%d", x)` はどこ?

問: 他に何がいる?

ここまで来たよ

2 ランダムウォークと離散型擬似乱数

2 ランダムウォークのサンプルパスの標本抽出

- ランダムウォークを記述する言葉
- ランダムウォークのサンプルパスの抽出
- 確率シミュレーションによる推定

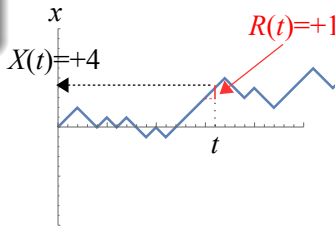
ランダムウォークの座標の母期待値, 母比率は?

$R(t)$ やランダムウォークの座標 $X(1000)$ は確率変数.

母ナントカの間

母ナントカを厳密に求めよう.

- 母平均値 $E[R(t)]$, 母期待値 $E[e^{R(t)}]$, 母比率 $P(R(t) > 1)$
- 母平均値 $E[X(1000)]$, 母期待値 $E[e^{X(1000)}]$, 母比率 $P(X(1000) > 1)$
- 母比率 $P(X(50) = 12 \text{ かつ } X(100) = 25)$



別のタイプの間 (推定)

$R(t)$ の確率分布 $f(x)$ の式を知らない (例:誰かが作った `getrandom` の中身不明) けど, Excel データ (標本) だけはあるとする. 母ナントカを推定したい.

確率シミュレーション

母ナントカのコンピュータによる計算方法 (いま使わない)

$E[X] = \sum_{x=1}^3 xf(x)$ のような母ナントカの公式をプログラムで計算する。

$f(x)$ が求まったら苦労しないよ

最終的な誤差 = 数値計算誤差

別のタイプの作戦: 確率シミュレーション

確率的現象を、擬似乱数を使ってそのままコンピュータ上で再現し (simulate), 繰り返して実行して標本抽出して、母ナントカを推定すること。

- いつでも推定はできちゃう

- 要 **コンピュータ or 奴隷**

最終的な誤差 = 統計誤差 + 数値計算誤差

母期待値・母平均値・母比率の推定

母期待値の推定

岩薩林 確率・統計 §7.1

確率統計☆演習 I(2020)L12

$$\text{標本期待値 } \overline{\phi(X)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(X^{(n)})$$

が母期待値 $E[\phi(X)]$ の‘よい’推定値になっている。

確率変数 $Y = \phi(X)$ の母平均値の推定と思おう。

母平均値の推定

岩薩林 確率・統計 §7.1

確率統計☆演習 I(2020)L12

$$\text{標本平均値 } \bar{X} = \frac{1}{N} (X^{(1)} + \dots + X^{(N)}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X^{(n)}$$

が、母平均値 $E[X]$ の‘よい’推定値になっている。

母比率の推定

岩薩林 確率・統計 §7.3

確率統計☆演習 I(2020)L12

X のサンプルのデータ N 個中 k 個が「条件... を満たす」とき,

$$\text{標本比率 } \hat{p} = \frac{k}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_{[\dots]}(X^{(n)})$$

が母比率 $P(\text{「条件...」}) = E[I_{[\dots]}(X)]$ の‘よい’推定値になっている.

L02-Q2

Quiz(ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散)

仕組みのよくわからないランダムウォークで標本抽出したところ、 $X(3)^{(n)}$ $n = 1, 2, \dots, 10$ が

3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -3

だった.

- ① 母平均値 $E[X(3)]$ を点推定しよう.
- ② 母分散 $V[X(3)]$ を点推定しよう.
- ③ 母期待値 $E[X(3)^3]$ を点推定しよう.
- ④ 母比率 $P(X(3) > 1)$ を点推定しよう.

