

ランダムウォークの座標の推定

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L03(2021-04-22 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-04-23 Fri 08:27 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの座標の母平均値, 母分散, 母期待値, 母比率を C と Excel で推定できる
- 母平均値, 母分散は正確に計算できる



L02-Q2

Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

- ① 標本平均値 $\overline{X(3)} = \frac{1}{10}(3 + 3 + \dots + (-3)) = 1$. よって, 母平均値 $E[X(3)]$ は 1 と推定できる.
- ② 不偏標本分散 $S^2 = \frac{1}{10-1}((3-1)^2 + \dots + (-3-1)^2) = \frac{32}{9}$. よって母分散 $E[X(3)]$ は $\frac{32}{9}$ と推定できる.
- ③ 標本期待値 $\overline{X(3)^3} = \frac{1}{10}(3^3 + \dots + (-3)^3) = \frac{29}{5}$. よって母期待値 $E[X(3)^3]$ は $\frac{29}{5}$ と推定できる.
- ④ 標本期待値 $\overline{I_{[X>1]}(X(3))} = \frac{1}{10}(1 + 1 + 1 + 0 + \dots + 0) = \frac{3}{10}$. よって母比率 $p = E[I_{[X>1]}(X(3))]$ は $\frac{3}{10}$ と推定できる.

ここまで来たよ

3 ランダムウォークのサンプルパスの標本抽出

3 ランダムウォークの座標の推定

- 座標の推定
- ランダムウォークの座標の母平均値と母分散
- ソリューションとプロジェクト
- 乱数のシードとは?

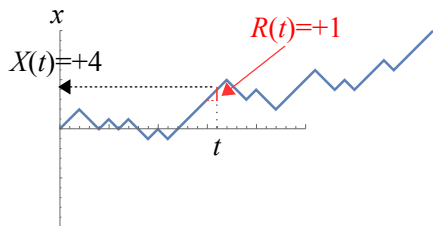
ランダムウォーク (確率過程の例)

ランダムウォーク

$$X(t) = X(t-1) + R(t), \quad X(0) = x_0$$

階差数列 $R(t)$: 独立同分布にしたがう確率変数.

ランダムウォーカー座標 $X(t)$: 確率変数.



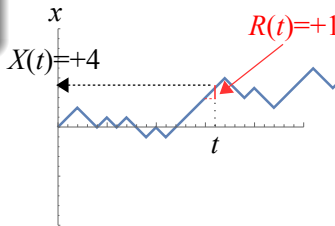
ランダムウォークの座標の母期待値, 母比率は?

$R(t)$ やランダムウォークの座標 $X(1000)$ は確率変数.

母ナントカの間

母ナントカを厳密に求めよう.

- 母平均値 $E[R(t)]$, 母期待値 $E[e^{R(t)}]$, 母比率 $P(R(t) > 1)$
- 母平均値 $E[X(1000)]$, 母期待値 $E[e^{X(1000)}]$, 母比率 $P(X(1000) > 1)$
- 母比率 $P(X(50) = 12 \text{ かつ } X(100) = 25)$



別のタイプの間 (推定)

$R(t)$ の確率分布 $f(x)$ の式を知らない (例:誰かが作った `getrandom` の中身不明) けど, Excel データ (標本) だけはあるとする. 母ナントカを推定したい.

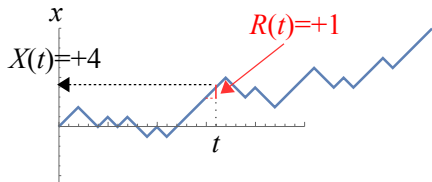
ランダムウォークの座標 $X(t)$ の標本

$X(t)^{(n)}$

t : 時刻, 数列の第 t 項

(n) : サンプル内通し番号

	$t = 0$	$t = 1$	\dots	$t = T$
$n = 1$	$X(0)^{(1)},$	$X(1)^{(1)},$	\dots	$X(T)^{(1)},$ 改行
$n = 2$	$X(0)^{(2)},$	$X(1)^{(2)},$	\dots	$X(T)^{(2)},$ 改行
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n = N$	$X(0)^{(N)},$	$X(1)^{(N)},$	\dots	$X(T)^{(N)},$ 改行



Excel で $X(t)$ の母平均値, 母分散, 母比率を推定

確率統計☆演習 I(2020)L02

- 標本平均値, 標本期待値 average
- 不偏標本分散 var.s
- $I_{[\text{条件}]}(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が条件を満たす}) \\ 0 & (x \text{ が条件を満たさない}) \end{cases}$
=if(x の条件,1,0)

$X(0)$ と $X(1)$ は別の確率変数だから, 「混ぜて標本ナントカを得る」ことに意味はない.

標本期待値は Excel を使わなくても C の中でも計算できる!

$$\overline{\phi(X(T))} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(X(T)^{(n)})$$

```
1                                     /* 1 */
2  for (n) {
3                                     /* 2 */
4    for (t) {
5                                     /* 3 */
6      x=x+getrandom (getuniform ());
7                                     /* 4 */
8    }
9                                     /* 5 */
10 }
11                                     /* 6 */
```

sum1=0, sum1+=phi(x) (例 $\phi(x) = x^3$), printf("%f", (double)sum1/N)?

標本比率のCによる計算

$\phi(x) = I_{[\text{条件}]}(x)$ に相当するに相当する phi は?

例で. $P(X > 10)$ を考えるとき,

$$I_{[x>10]}(x) = \begin{cases} 1 & (x > 10) \\ 0 & (x \geq 10) \end{cases}$$

↓

```
1 int phi(int x){  
2     if(x>10){  
3         return 1;  
4     } else {  
5         return 0;  
6     }
```

そのままじゃん.

この場合, sum1 は **count1** と名付けたほうがいいかも.

ここまで来たよ

3 ランダムウォークのサンプルパスの標本抽出

3 ランダムウォークの座標の推定

- 座標の推定
- ランダムウォークの座標の母平均値と母分散
- ソリューションとプロジェクト
- 乱数のシードとは?

L03-Q1

Quiz(ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散)

時刻 t におけるランダムウォーカーの座標 $X(t)$ を、次の漸化式で定める ($t = 0, 1, 2, \dots$).

$$X(t) = X(t-1) + R(t), \quad X(0) = 0$$

確率変数 $R(t)$ ($t = 1, 2, 3, \dots$) は、互いに独立、同分布に従い、

- 確率 $5/9$ で $R(t) = -1$,
- 確率 $1/9$ で $R(t) = 0$,
- 確率 $3/9$ で $R(t) = +1$,

の値をとる.

- ① $R(t)$ の母平均値を求めよう.
- ② $R(t)$ の母分散を求めよう.
- ③ $R(t)$ の母標準偏差を求めよう.
- ④ $X(20)$ の母平均値を求めよう.
- ⑤ $X(20)$ の母分散を求めよう.
- ⑥ $X(20)$ の母標準偏差を求めよう.

離散型確率変数の母期待値 岩窪林 確率・統計 (3.3) 母分散 岩窪林 確率・統計 (3.7),(3.8) 独立同分布の和の分散 岩窪林 確率・統計 (3.21)

ランダムウォーク

ランダムウォークの定義

$R(t)$: 独立同分布に従う離散型確率変数. $t = 1, 2, 3, \dots$

$X(t)$: 次で決まる確率変数.

初期条件 $X(a) = b$ (正確には $P(X(a) = b) = 1$)

漸化式 $X(t) = X(t-1) + R(t)$ ($t = a+1, a+2, a+3, \dots$)

$R(t)$ が二項分布 岩薩林 確率・統計 §3.4 $B(1, p)$ にしたがうとき

$$\text{確率 } P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ q = 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

例 $p = \frac{2}{3}$.

ランダムウォークの座標の母平均値と母分散

確率統計☆演習 I(2018)L06

$$\begin{aligned}
 X(t) &= X(t-1) + R(t) \\
 &= (X(t-2) + R(t-1)) + R(t) \\
 &= \dots = X(a) + R(a+1) + \dots + R(t)
 \end{aligned}$$

連続/離散型ランダムウォークの母平均値/母分散

$E[R(t)] = \mu, V[R(t)] = \sigma^2$ のとき,

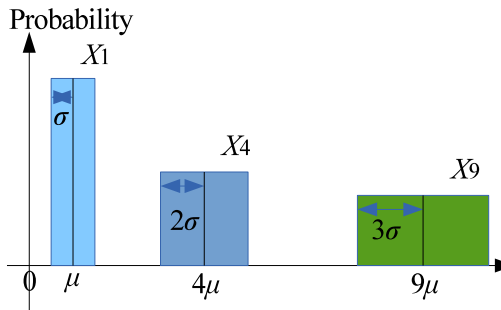
$$E[X(T)] = E[X(a) + R(a+1) + \dots + R(T)] = b + (T-a)\mu \quad (E[\] \text{ の性質})$$

$$\begin{aligned}
 V[X(T)] &= V[X(a) + R(a+1) + \dots + R(T)] \\
 &= V[R(a+1) + \dots + R(T)] \quad (X(a) = b \text{ は定数}) \\
 &= (T-a)\sigma^2 \quad (R(t) \text{ は互いに独立})
 \end{aligned}$$

$a = b = 0$ という簡単な場合, $X(t)$ の母平均値, 母分散は t に正比例する.

$X(t)$ の母標準偏差 = $\sqrt{V[X(T)]}$ = **自分で書いてね**

ってことは、ランダムウォークの座標の確率分布の時間変化はこんな感じ？



L03-Q2

Quiz(ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散)

時刻 $t = -5$ に、 $x = 2$ から出発するランダムウォークを考える。
時刻ごとに、ランダムウォーカーは、

- 確率 $2/3$ で $+1$,
- 確率 $1/3$ で 0 ,

だけ移動する。時刻ごとの移動分は独立である。

- ① 確率 $P(X(3) = 5)$ を求めよう。
- ② $X(3)$ の母平均値を求めよう。
- ③ $X(3)$ の母分散を求めよう。
- ④ $X(3)$ の母標準偏差を求めよう。

ここまで来たよ

3 ランダムウォークのサンプルパスの標本抽出

3 ランダムウォークの座標の推定

- 座標の推定
- ランダムウォークの座標の母平均値と母分散
- ソリューションとプロジェクト
- 乱数のシードとは?

IDE, ソリューション, プロジェクト

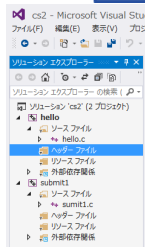
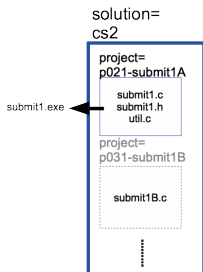
IDE=Integrated Development Environment 統合開発環境

編集, コンパイル, 実行, デバッグを1つのアプリケーション内で完結して実行できるようにしたもの. 例: Visual Studio, Eclipse, NetBeans.

プロジェクト=1個の実行ファイル (a.out, *.exe) を作るための, 複数のソースファイル (*.c, *.h) をまとめて管理するもの. プロジェクト内に main は1個だけ.

ソリューション=複数の関係するプロジェクトをまとめて管理するもの

VS では, 1個のソリューションを開いた状態で, スタートアッププロジェクトをコンパイル, 実行する.



ここまで来たよ

3 ランダムウォークのサンプルパスの標本抽出

3 ランダムウォークの座標の推定

- 座標の推定
- ランダムウォークの座標の母平均値と母分散
- ソリューションとプロジェクト
- 乱数のシードとは?

擬似乱数列生成の仕組みとシード

擬似乱数列 = 'ほぼ' ランダムな数列

2回続けて `int rand()` を呼んで得られる 2 個の数の分布は独立であるかのように考えてる (けど... そこが擬似).

(標本抽出のたびに別々の)seed を指定することが必要

- seed に応じて、毎回異なる乱数列が得られる.
- 特定の乱数列に対する動作を再現できる. デバッグでは必須.
- seed を適切に設定すると、複数回の実行で、別々の (独立な) 標本抽出が行える.

L03-Q3

Quiz(rand() の振る舞い)

次のプログラムで、seed を無作為に入力するとき、A が出力される確率は?

```
1  int getrandom(double y){
2      if( y<1/3.0 ){
3          return 0;
4      }else{
5          return 1;
6      }
7  }
8
9  int main(){
10     int seed;
11     scanf("%d",&seed);
12     srand(seed);
13     if( getrandom(getuniform())==getrandom(getuniform()) ){
14         printf("A\n");
15     }
16     return 0;
17 }
```

- ① 0
- ② 1/2
- ③ 5/9 に近い
- ④ 6/9 くらい
- ⑤ 1

Moodle App

取得 `https://download.moodle.org/mobile`



指定する URL `https://moodle.hig3.net/moodle`

Moodle から通知がくる, 閲覧しやすい.

テストや練習問題には使わないほうがいい?