

ランダムウォークの座標の確率分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L04(2021-04-29 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-04-26 Mon 19:39 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの $X(t)$ の初期条件と漸化式から、小さい t に対して、時刻 t に位置 x にいる確率 $p(x, t)$ を計算できる.
- $p(x, t)$ の初期条件と漸化式が書ける.



L03-Q1

Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

- ① $\mu = E[R(t)] = (-1) \cdot \frac{5}{9} + 0 \cdot \frac{1}{9} + (+1) \cdot \frac{3}{9} = -\frac{2}{9}$.
- ② $E[(R(t))^2] = (-1)^2 \cdot \frac{5}{9} + 0^2 \cdot \frac{1}{9} + (+1)^2 \cdot \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$. $E[R(t)]^2 = (-\frac{2}{9})^2$.
 $\sigma^2 = V[R(t)] = E[(R(t))^2] - E[R(t)]^2 = \frac{68}{81}$.

次のように直接に計算しても同じ結果になる.

$$V[R(t)] = E[(R(t) - \mu)^2] =$$

$$((-1) - (-\frac{2}{9}))^2 \cdot \frac{5}{9} + (0 - (-\frac{2}{9}))^2 \cdot \frac{1}{9} + ((+1) - (-\frac{2}{9}))^2 \cdot \frac{3}{9}.$$

- ③ $\sigma_{R(t)} = \sqrt{\frac{68}{81}} = \frac{2\sqrt{17}}{9}$.
- ④ 一般に $E[X(T)] = T \cdot E[R(t)]$. $T = 20$ とすると,
 $E[X(20)] = 20E[R(t)] = -\frac{40}{9}$.
- ⑤ 一般に $V[X(T)] = T \cdot V[R(t)]$. $T = 20$ とすると,
 $V[X(20)] = 20V[R(t)] = \frac{1360}{81}$.
- ⑥ $\sigma_{X(20)} = (V[X(20)])^{1/2} = (\frac{1360}{81})^{1/2} = \frac{4}{9}\sqrt{85}$

L03-Q2

Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

- ① $R(-4) + \dots + R(3) \sim B(8, \frac{2}{3})$ が、値 $5 - 2 = 3$ をとる確率を求める。
 $(\frac{8}{3})(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^5$.
- ② $E[X(3)] = E[X(-5) + R(-4) + \dots + R(3)] = 2 + 8 \cdot \frac{2}{3}$.
- ③ $V[X(3)] = V[X(-5) + R(-4) + \dots + R(3)] = 8 \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{3}$.
- ④ $\sqrt{8 \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{3}}$.

ここまで来たよ

④ ランダムウォークの座標の推定

④ ランダムウォークの座標の確率分布

- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x, t)$ の漸化式
- $p(x, t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式から $p(x, t)$ の値を求める

ランダムウォーク

ランダムウォークの定義

$R(t)$: 独立同分布に従う離散型確率変数. $t = 1, 2, 3, \dots$

$X(t)$: 次で決まる確率変数.

初期条件 $X(a) = b$ (正確には $P(X(a) = b) = 1$)

漸化式 $X(t) = X(t-1) + R(t)$ ($t = a+1, a+2, a+3, \dots$)

$R(t)$ が二項分布 岩薩林 確率・統計 §3.4 $B(1, p)$ にしたがうとき

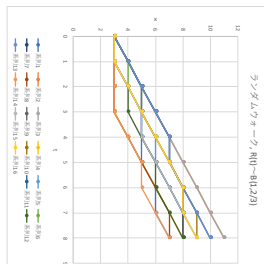
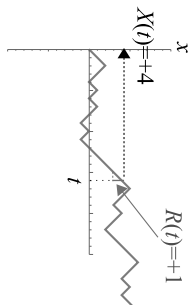
$$\text{確率 } P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ q = 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

例 $p = \frac{2}{3}$.

日本語で言うと,

- x 軸上を移動するランダムウォーカーを考える $\rightsquigarrow X(t)$
- ウォーカーは, 時刻 $t = a$ に, $x = b$ から出発する (確率が 1 である)
 $\rightsquigarrow P(X(a) = b) = 1$
- ウォーカーは各時刻に, 確率 $\frac{2}{3}$ で $+1$ だけ移動し, 確率 $\frac{1}{3}$ で移動しない $\rightsquigarrow X(t) = X(t-1) + R(t), R(t) \sim B(1, \frac{2}{3})$

$X(t)$: 時刻 t のランダムウォーカーの座標 (を確率変数とみたもの)
 $(X(0), X(1), X(2), \dots, X(t))$: パス (path) (を確率変数とみたもの)



$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

L04-Q1

Quiz(ランダムウォークの座標の確率分布)

離散ランダムウォークで, $X(0) = 0$, $X(t) = X(t-1) + R(t)$,

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

とする ($0 < p < 1$)

- ① $P(X(2) = x)$ を求めよう ($x = 0, 1, \dots$ は整数).
- ② $E[X(2)]$ を求めよう.
- ③ $V[X(2)]$ を求めよう.
- ④ $P(X(2) > 0)$ を求めよう.

cf. 二項分布 岩薩林 確率・統計 §3.4

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

ここまで来たよ

④ ランダムウォークの座標の推定

④ ランダムウォークの座標の確率分布

- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x, t)$ の漸化式
- $p(x, t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式から $p(x, t)$ の値を求める

確率分布 $p(x, t)$ の定義

$p(x, t)$ の定義

時刻 t に、ウォーカーが x にいる確率 $p(x, t) = P(X(t) = x)$.

離散型確率分布 $f(x) = p(x, t)$ (が t の種類だけたくさんある)

岩薩林 確率・統計 §3.1

性質 $\forall t \quad \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x, t) = 1$

$t \backslash x$	0	1	2
0			
1			
2			

$p(x, t)$ の漸化式

具体例で

「ランダムウォーカーが時刻 t に x にいるとき、時刻 $t + 1$ には、確率 p で $x + 1$ に移動し、確率 $q = 1 - p$ で x にとどまる。

↓

$$X(t) = X(t - 1) + R(t)$$

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ q = 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

確率微分方程式的描像, ランジュバン方程式的描像

↓ 確率 (合計 1) だけど、 x 軸上に合計 $N = 1000$ 人いるかのように考えよう。

時刻 t に x にいる $N \times p(x, t)$ 人のうち、時刻 t に、平均的には

- x から $x + 1$ に去るのは、 $N \times p(x, t - 1) \times p$ 人
- x から移動せず x にとどまるのは $N \times p(x, t - 1) \times q$ 人

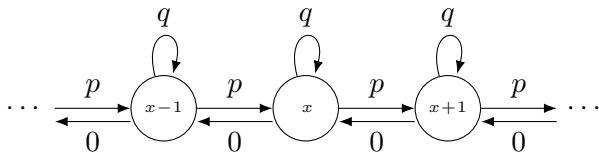
$X(t)$ の漸化式から $p(x, t)$ の漸化式を導きたい
逆に考えると、時刻 t に、

- $x - 1$ から、 x に来るのは、 $N \times p(x - 1, t - 1) \times p$ 人
- x から移動せず x にいるのは、 $N \times p(x, t - 1) \times q$ 人

この合計が、 t に x にいる人すべて $N \times p(x, t)$.

両辺のどこにも、確率変数はなくなった!(確率はあるけど)

拡散方程式的描像、マスター方程式的描像、フォッカー-プランク方程式的描像



係数は t によらない.

計算で

条件付き確率

$$\begin{aligned}
 P(X(t) = x) &= \sum_y P(X(t) = x | X(t-1) = y) P(X(t-1) = y) \\
 &= \dots + 0 \\
 &\quad + P(X(t) = x | X(t-1) = x-1) P(X(t-1) = x-1) \\
 &\quad + P(X(t) = x | X(t-1) = x) P(X(t-1) = x) + 0 + \dots \\
 &= P(R(t) = 1) P(X(t) = x-1) \\
 &\quad + P(R(t+1) = 0) P(X(t) = x)
 \end{aligned}$$

L04-Q2

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t , 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t = 5$ に $x = 2$ を出発し, 各時刻 t に,

- 確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動,
- 確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動,
- 確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない).

時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x, t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

ここまで来たよ

④ ランダムウォークの座標の推定

④ ランダムウォークの座標の確率分布

- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x, t)$ の漸化式
- $p(x, t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式から $p(x, t)$ の値を求める

$p(x, t)$ の初期条件

運動の初期条件 \Leftrightarrow 数列の初項

具体例で

「時刻 $t = 2$ に $x = 3$ から出発した」 (確率が 1)

↓

$$P(X(2) = 3) = 1$$

$X(t)$ の初期条件から $p(x, t)$ の初期条件を導きたい。

例 1

$t = 2$ に
は $x = 3$
にいる

$X(2)$...	2	3	4	...
確率	0	0	1	0	0

 $p(x, 2)$
 $=$

$$\begin{cases} 1 & (x = 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

例 2

$t = 1$ に
は $x =$
 $0, 9$ に各
 $\frac{1}{2}$ の確率
でいる

$X(1)$...	0	...	9	...
確率	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

 $p(x, 1)$
 $=$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & (x = 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 9) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L04-Q2(再掲)

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t , 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t = 5$ に $x = 2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動,
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動,
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない).

時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x, t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

ここまで来たよ

④ ランダムウォークの座標の推定

④ ランダムウォークの座標の確率分布

- ランダムウォークの座標の確率分布
- 確率分布 $p(x, t)$ の漸化式
- $p(x, t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式から $p(x, t)$ の値を求める

$p(x, t)$ を表で表現 I

$t \backslash x$...	0	...	$x - 1$	x	$x + 1$...
⋮		
$t - 1$				$p(x - 1, t - 1)$	$p(x, t - 1)$	$p(x + 1, t - 1)$	
t				$p(x - 1, t)$	$p(x, t)$	$p(x + 1, t)$	
⋮							

漸化式と初期条件から $p(x, t)$ を計算

L04-Q3

Quiz(ランダムウォークの確率 $p(x, t)$ の漸化式)

次の確率分布の漸化式と初期条件を考える. 空いてるセルをうめよう.

$$p(x, t) = \frac{2}{3}p(x-1, t-1) + \frac{1}{3}p(x, t-1), \quad p(x, 0) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$t \backslash x$...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	x	...
0
1
2
3
⋮											
t										$p(x, t)$	