マルコフ連鎖

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L05(2021-05-06 Thu)

最終更新: Time-stamp: "2021-04-29 Thu 14:22 JST hig"

今日の目標

- 転置確率行列, 確率ベクトルの定義を説明できる
- マルコフ連鎖の定義を説明できる
- 現象から転置推移確率行列を書ける
- 定常分布を求められる

L04-Q1

Quiz 解答:ランダムウォークの座標の確率分布

1. $$P(X(2)=x)=\begin{cases} p^0(1-p)^2 & (x=0) \\ 2p^1(1-p)^1 & (x=1) \\ p^2(1-p)^0 & (x=2) \end{cases}$$
2. $\mathrm{E}[X(2)]=2p.$
3. $\mathrm{V}[X(2)]=2p(1-p).$
4. $P(X(2)>0)=\mathrm{E}[\mathrm{I}_{[X>0]}(X(2))]=2p(1-p)+p^2.$

L05-Q2

Quiz 解答:離散的なランダムウォークの確率の漸化式

$$
\begin{aligned}
p(x,t) =& \frac{1}{7} \times p(x-2,t-1) + \frac{2}{7} \times p(x,t-1) + \frac{4}{7} \times p(x+1,t-1), \\
p(x,5) =& \begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

L05-Q3

Quiz 解答:離散的なランダムウォークの確率の漸化式

$$
\begin{aligned}
p(x,t) =& \frac{1}{7} \times p(x-2,t-1) + \frac{2}{7} \times p(x,t-1) + \frac{4}{7} \times p(x+1,t-1), \\
p(x,5) =& \begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

L05-Q4

Quiz 解答:ランダムウォークの確率 $p(x,t)$ の漸化式

空欄は 0.

$t \backslash x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	x	$\cdots$
0	$\cdots$				1				$\cdots$		$\cdots$
1	$\cdots$				$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$			$\cdots$		$\cdots$
2	$\cdots$				$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$		$\cdots$		$\cdots$
3	$\cdots$				$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\cdots$		$\cdots$

ここまで来たよ

5 ランダムウォークの座標の確率分布

5 マルコフ連鎖

- (復習)$p(x,t)$ の漸化式
- 確率ベクトル, 転置確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

ルールの $p(x,t)$ の漸化式への変換

「ランダムウォーカーは時刻 a に b から出発, が時刻 $t-1$ に x にいるとき, 時刻 t には, 確率 p で $x+1$ に, 確率 q で $x-1$ に移動, 確率 $1-p-q$ でその場にとどまる」

$\Downarrow$

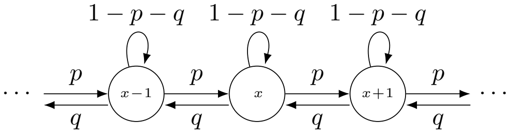
$P(X(a)=b)=1,$

$$X(t)=X(t-1)+R(t), \quad P(R(t)=r)=\begin{cases} q & (r=-1) \\ 1-p-q & (r=0) \\ p & (r=1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$p(x,a)=\begin{cases} 1 & (x=b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

$$p(x,t)=p\cdot p(x-1,t-1)+(1-p-q)\cdot p(x,t-1)+q\cdot p(x+1,t-1).$$



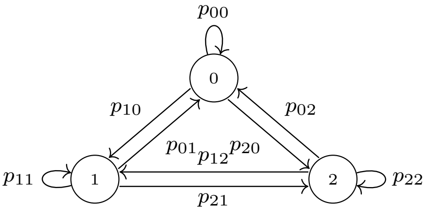
推移図 推移=transition

マルコフ連鎖の例 I

空間の移動でなく，
ウォーカー:猫 0:食べる 1:寝る 2:遊ぶ の間の状態遷移と思ってもよい．

状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$

状態 $x = 0$:食べる,...



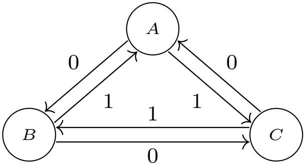
推移確率　　条件付き確率 確率統計☆演習 II(2018)L01

$$p_{\text{先 元}} = p_{xy} = P(X(t) = x | X(t-1) = y)$$

上の量を，世の中では p_{xy} でなく p_{yx} と書くこともある．

マルコフ連鎖「このような」状態空間と，推移確率の組．

比較:オートマトンの状態遷移図では，矢印の数値は確率でなく入力



$p(x,t)$ の漸化式

$$p(x,t) = p\cdot p(x-1,t-1) + (1-p-q)\cdot p(x,t-1) + q\cdot p(x+1,t-1)$$

$$\begin{aligned} p(0,t) =& p_{00}\cdot p(0,t-1) + p_{01}\cdot p(1,t-1) + p_{02}\cdot p(2,t-1) \\ p(1,t) =& p_{10}\cdot p(0,t-1) + p_{11}\cdot p(1,t-1) + p_{12}\cdot p(2,t-1) \\ p(2,t) =& p_{20}\cdot p(0,t-1) + p_{21}\cdot p(1,t-1) + p_{22}\cdot p(2,t-1) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} p(0,t) \\ p(1,t) \\ p(2,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(0,t-1) \\ p(1,t-1) \\ p(2,t-1) \end{pmatrix}$$

$$p(x,t) = \sum_{y=0,1,2} p_{xy}\cdot p(y,t-1). \qquad (x=0,1,2)$$

転置推移確率行列 M, 分布=ベクトル $\vec{p}(t)$ で書くと (x, y が成分番号)

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1).$$

ベクトル $\vec{p}(t)$ は, 先週の横 x, 縦 t の表の横 1 行に相当.
この漸化式を解くと, $\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1) = M^2\vec{p}(t-2) = \cdots = M^t\vec{p}(0)$.

L05-Q1

Quiz(マルコフ連鎖の推移確率行列)

$x = 0, 1, 2, 3$ 上のランダムウォークを考える.
時刻 $t = 0$ に $x = 1$ から出発する. 時刻 t に x にいたウォーカーは,

- 確率 $\frac{1}{7}$ で $x - 1$ に移動し
- 確率 $\frac{2}{7}$ で $x + 1$ に移動し
- 確率 $\frac{4}{7}$ で x にとどまる

ただし, 上のルールで, $x = 0$ から $x = -1$ に移動しようとしたら $x = 3$ に行く, $x = 3$ から $x = 4$ に移動しようとしたら $x = 0$ に行くとする.
これをマルコフ連鎖としてとらえたとき,

1. 推移図を書こう.
2. 転置推移確率行列を書こう.
3. 時刻 $t = 0$ における分布 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき,$\vec{p}(1)$ を求めよう.

L05-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の推移確率行列)

$x=0,1,2,3$ 上のランダムウォークを考える.
時刻 $t=0$ に $x=1$ から出発する. 時刻 t に x にいたウォーカーは,

- 確率 $\frac{1}{7}$ で $x-1$ に移動し
- 確率 $\frac{2}{7}$ で $x+1$ に移動し
- 確率 $\frac{4}{7}$ で x にとどまる

ただし, 上のルールで, $x=0$ から $x=-1$ や, $x=3$ から $x=4$ に移動しようとしたときは, 元の x にとどまるものとする.
これをマルコフ連鎖としてとらえたとき,

1. 推移図を書こう.
2. 転置推移確率行列を書こう.
3. 時刻 $t=0$ における分布 $\vec{p}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ であるとき,$\vec{p}(1)$ を求めよう.

ここまで来たよ

5 ランダムウォークの座標の確率分布

5 マルコフ連鎖
- (復習)$p(x,t)$ の漸化式
- 確率ベクトル, 転置確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

線形代数のりで確率ベクトル, 転置確率行列の言葉を準備 I

非負ベクトル

m 次元ベクトル $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{pmatrix}$ が $p_i \geq 0$ を満たすとき, 非負ベクトルという.

確率ベクトル

非負ベクトル $\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{m-1} \end{pmatrix}$ が, 規格化 $\sum_{i=0}^{m-1} p_i = 1$ を満たすとき, 確率ベクトルという.

線形代数のりで確率ベクトル, 転置確率行列の言葉を準備 II

離散型確率分布 $f(x)$ は, 確率ベクトルと 1 対 1 に対応.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

非負行列 ($n \times m = 3 \times 2$ の例で)

実行列 $\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \\ p_{20} & p_{21} \end{pmatrix}$ が $p_{ij} \geq 0$ を満たすとき非負行列という.

転置確率行列

行列 $M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \\ p_{20} & p_{21} \end{pmatrix}$ の各列ベクトルが確率ベクトルであるとき, つまり $\forall j \sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = 1$ であるとき, M を転置確率行列という.

推移確率行列

転置推移確率行列

マルコフ連鎖に現れる, 転置確率行列

$$M = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

を, マルコフ連鎖の**転置推移確率行列**という. $m \times m$ 正方行列.

漸化式 $\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$ の解

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1) = M^2\vec{p}(t-2) = \cdots = M^t\vec{p}(0).$$

転置確率行列と確率ベクトルの積

M が転置確率行列, $\vec{p}$ が確率ベクトルのとき, $M\vec{p}$ も確率ベクトル

証明:

確率過程とマルコフ連鎖

確率過程　時間 t に依存する確率変数

もちろん反復試行から来る独立な確率変数群 $R(t)$ も時間 t に依存するけど, 独立じゃない場合がおもしろい

離散時間マルコフ連鎖は, 次の性質を満たす確率過程.

離散時間　t が離散的. $t = 0, 1, 2, \ldots$

マルコフ Markov　$\vec{p}(t)$ が直前の時刻の分布 $\vec{p}(t-1)$ だけから決まる. 転置推移確率行列 p_{xy} で表現できる.

連鎖 chain　状態空間 $S \ni x$ が離散的.

いま考えてる, 時間空間離散のランダムウォークや猫は離散時間マルコフ連鎖の典型例.
離散時間マルコフ連鎖の (確率) 分布は, 確率ベクトルで表現できる.
離散時間マルコフ連鎖の遷移確率は, 転置確率行列で表現できる.

ここまで来たよ

5 ランダムウォークの座標の確率分布

5 マルコフ連鎖
- (復習)$p(x,t)$ の漸化式
- 確率ベクトル, 転置確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

定常分布

$\vec{p} = M\vec{p}$ となる分布 $\vec{p}$ を定常分布という.

意味 $\boxed{\text{自分の言葉でどうぞ}}$

線形代数の言葉で言うと, 定常分布は, 転置推移確率行列 M の $\boxed{\text{自分の言葉でどうぞ}}$

建設的心配性大爆発

- 定常分布っていつでもある? $\rightsquigarrow$ Yes
- 固有値 (の絶対値) が 1 より大きな固有ベクトルはあるの? $\rightsquigarrow$ No

状態数 m が有限のとき, ペロン・フロベニウスの定理から言える.

固有値 1 の存在

転置確率行列は 固有値 1 を持つ.

証明

分布の時間発展 I

L05-Q3

Quiz(マルコフ連鎖の時間発展)

状態空間 $\{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列は

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. 初期分布 $\vec{p}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(1)$ を求めよう.
2. 定常分布をすべて求めよう.
3. 上の初期分布のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
4. 上の初期分布のとき極限分布 $\vec{p}(\infty) = \lim_{t \to +\infty} \vec{p}(t)$ と収束の様子 $\log|\vec{p}(t) - \vec{p}(\infty)|$ を調べよう.
5. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.