行列の積, 行列とベクトルの積, 行列の転置

樋口さぶろお　http://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L02(2019-04-16 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2019-04-16 Tue 07:52 JST hig"

今日の目標

- 高橋線形 §1.3 高橋線形 §1.4 行列と行列の積, 行列とベクトルの積 (のはいった計算) ができる
- 高橋線形 §1.5 行列, ベクトルの転置 (のはいった計算) ができる.

L01-Q1
Quiz 解答:縦ベクトル横ベクトル

1. $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
2. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

L01-Q2
Quiz 解答:行列の成分

1. $a_{21} = 3.$
2. $a_{12} = 9.$
3. $$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

L01-Q3

Quiz 解答:ベクトルの和とスカラー倍

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \\ -30 \\ 5 \end{bmatrix}$$

L01-Q4

Quiz 解答:行列の和とスカラー倍

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -30 & 5 \end{bmatrix}$$

ここまで来たよ

1. 略解: 行列とベクトルの和差スカラー倍
2. 行列の積, 行列とベクトルの積, 行列の転置
   - 行列の積
   - 転置行列
   - 線形変換

行列の積 高橋線形 §1.3

行列の積

- 行列 A ($m \times \ell$ 型, 成分 a_{ij} $(1 \le i \le m, 1 \le j \le \ell)$)
- 行列 B ($\ell' \times n$ 型, 成分 b_{ij} $(1 \le i \le \ell', 1 \le j \le n)$)

に対して, $\ell = \ell'$ のとき (だけ), 行列 A, B の積 AB が定義される.

- 行列 $C = AB$ ($m \times n$ 型, 成分 c_{ij} $(1 \le m, 1 \le j \le n)$).

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$ 高橋線形例題 1.1

$m = 2, \ell = \ell' = 3, n = 2.$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 3$$

行列の積のルールの直観的おぼえ方

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj}.$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

高橋線形例題 1.1

高橋線形問題 1.7　高橋線形演習問題 1.1(3)

行列の積の計算でやっていいこといけないこと

積っていう名前だけど, 今までによく知ってる数の積とは別のもの.
$A \circ B$ ってかいたほうがまし.

高橋線形積の法則 (p8)

(1) $(AB)C = A(BC)$. 当たり前ではないけど成立している.
- グー ∘ チョキ=グー (強いほう) みたいな演算を考えると?

(4) $AB \neq BA$ 当たり前ではないし成立していない
- $A \circ B = A - B$ とおけば?

記法

$ABC = (AB)C = A(BC)$.

$$A^p = \underbrace{(\cdots((AA)A)\cdots)A}_{p} = \underbrace{A\cdots A}_{p}.$$

高橋線形演習問題 1.1(4)(5)(6)

例題

L02-Q1

Quiz(行列の積の法則)

次の計算の $=$ の上に, 使った法則の法則の番号を $\overset{(1)(3)}{=}$ のように, 間違った計算なら $\overset{\times}{=}$ のように, 加筆しよう.

1.
$$\begin{aligned}(A+B)^2 =&(A+B)(A+B) = A(A+B)+B(A+B)\\ =&(A^2+AB)+(BA+B^2) = A^2+2AB+B^2.\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(A+3B)B(-2A+4B) =&-2(AB+3B^2)(A-2B) = -2(AB+3B^2)\\ =&-2A^2B-6B^2A+4AB^2-6B^3.\end{aligned}$$

行列とベクトルの積

ベクトルを行列の一種と思えばいいだけ.

高橋線形問題 1.12

$$\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

単位行列 高橋線形 §1.4

$n \times n$ 型の単位行列

$$E = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

性質: 任意の $n \times n$ 行列に対して, $AE = EA = A$.
スカラー:1 = 行列:単位行列.

(i, j) 成分を e_{ij} とすると, $e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ Kronecker のデルタ記号

$\sum$ の中で, 添字置き換え係: $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} f_i \delta_{ij} = f_j, \quad \sum_{j=1}^{\ell} \delta_{ij} f_j = f_i,$

ここまで来たよ

1. 略解: 行列とベクトルの和差スカラー倍
2. 行列の積, 行列とベクトルの積, 行列の転置
   - 行列の積
   - 転置行列
   - 線形変換

転置行列 高橋線形 S1.5

転置行列

- 行列 A ($m \times n$ 型, 成分 a_{ij} $(1 \leq m, 1 \leq j \leq n)$)

に対して,

- A の転置行列 $M = {}^{\mathrm{t}}A$ ($n \times m$ 型, 成分 c_{ij} $(1 \leq n, 1 \leq j \leq m)$)

が定義される.

$$c_{ij} = a_{ji}$$

$${}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} \blacksquare & \square & \square \\ {\color{red}\blacksquare} & \blacksquare & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare & {\color{red}\blacksquare} \\ \square & \blacksquare \\ \square & \square \end{bmatrix}, \quad {}^{\mathrm{t}}\left[\quad\right]^{\mathrm{t}} \begin{bmatrix} \blacksquare & {\color{red}\blacksquare} \\ \square & \blacksquare \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \square & \square \\ {\color{red}\blacksquare} & \blacksquare & \square \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}$ が縦ベクトルなら ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}$ は横ベクトル.

$$\text{内積 } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \square \end{bmatrix}$$

積と転置の関係

$$^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}B \quad {}^{\mathrm{t}}A$$

$$A \times B = AB = C$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$${}^{\mathrm{t}}B \times {}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}C$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

高橋線形問題 1.17–1.20 | 高橋線形演習問題 1.7

ここまで来たよ

1. 略解: 行列とベクトルの和差スカラー倍
2. 行列の積, 行列とベクトルの積, 行列の転置
   - 行列の積
   - 転置行列
   - 線形変換

線形変換 高橋線形 §2.2

A:2×2 行列
$\boldsymbol{r}$: 2 次元縦ベクトル
$\boldsymbol{r}' = f(\boldsymbol{r}) = A\boldsymbol{r}$ も 2 次元縦ベクトル

線形変換

$f(\boldsymbol{r}) = A\boldsymbol{r}$ という形の, n 次元ベクトルを n 次元ベクトルに写す写像を線形変換, 線形写像という.

位置ベクトル (平面の点)$\boldsymbol{r}$ をベクトル $\boldsymbol{r}'$ に写す写像の中でいちばん簡単なもの. A: 係数行列.

1 次元に戻って考えてみると?
$x' = f(x)$: 実数 x を実数 x' に写す写像.
$x' = f(x) = ax$: 1 次関数. 上の写像の中でいちばん簡単なもの. a: 係数.
1 次=線形=linear

例 高橋線形 §2.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

回転移動を表す行列

回転行列

2×2 行列

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} +\cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$$

を回転行列という. $f(\boldsymbol{r}) = R(\theta)\boldsymbol{r}$ は, ベクトルを原点を中心に反時計回りに θ だけ回転移動する線形変換.

なぜなら⋯

$\theta = 0$ のときは?

対称移動を表す行列

対称移動を表す行列

x 軸に関する対称移動を表す 2×2 行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

y 軸に関する対称移動を表す 2×2 行列

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

連絡

線形代数 LINE@

https://line.me/R/ti/p/@arl7841z

Learn Math Moodle

https://learn.math.ryukoku.ac.jp/

- 次回はたぶん定常の教室 7-002.
- またチーム別エリア座席指定する予定.
- Trial 予告
- 来週は教科書 高橋線形 §2.2 高橋線形 2.3 読んできて.

サポート

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター (個人・グループで勉強+上級生の相談) 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下