逆行列・3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学理工学部数理情報学科

線形代数　L09(2019-06-25)

最終更新: Time-stamp: "2019-07-03 Wed 09:45 JST hig"

今日の目標

- 行列の行基本変形で逆行列を求められる
  高橋線形 §4.4
- 3 次元ベクトルの外積を計算できる 高橋線形 §5.5
- 3 次元ベクトルの外積の意味を説明できる

L08-Q1

Quiz 解答:階段行列と連立 1 次方程式の解　$a = 1/2$ のとき $\mathrm{rank}\,\tilde{A} = 1$, $a \neq 1/2$ のとき $\mathrm{rank}\,\tilde{A} = 2$.

ここまで来たよ

8 略解: n 元連立 1 次方程式

9 逆行列・3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積
- n 元連立 1 次方程式の解
- 逆行列
- 3 次元空間のベクトル

高橋線形 §4.3 定理 4.4

n 元連立 1 次方程式の係数行列を A, $m \times (n+1)$ 型の拡大係数行列を $\tilde{A}$ とするとき,

- $\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A + 1$ なら解なし.
- $\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A (= r) < n$ なら無限個の解 ($n-r$ 個のパラメタ)
- $\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A = n$ なら一意解

高橋線形問題 4.7

同次方程式の場合

右辺が $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ である連立 1 次方程式を同次方程式, 右辺が $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ である連立 1 次方程式を非同次方程式という. (非) 同次=(non-)homogeneous.

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

は常に自明解 (trivial solution) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を持つ. それ以外の解を非自明解 (non-trivial solution) という.

高橋線形 §4.3 定理 4.5

n 元連立 1 次方程式の係数行列を A, 拡大係数行列を $\tilde{A}$ とするとき,

- ~~$\mathrm{rank}\tilde{A} = \mathrm{rank}A + 1$ なら解なし.~~
- ~~$\mathrm{rank}\tilde{A} =$~~$\mathrm{rank}A (= r) < n$ なら自明解に加えて無限個の非自明解 $(n - r$ 個のパラメタ$)$
- ~~$\mathrm{rank}\tilde{A} =$~~$\mathrm{rank}A = n$ なら一意解 (自明解) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

線で消したところは, 同次方程式に対しては起きないので簡単化される.

階段行列への変形の手順

- 左端からの 0 の長さが最短の行 $i > 1$ を, 一番上に持っていく
  - 操作 III $\boxed{\text{i}} : \boxed{1}, \boxed{1} : \boxed{\text{i}}$
  - 0 の次の成分がピボット
- 1 行目と同じ最短の行 $j > 1$ について, 0 の長さをもうひとつ長くする.
  - 操作 II $\boxed{\text{i}} : \boxed{\text{i}} + \boxed{1} \times (-\bullet)$
- 最短の行 (ピボットを含む) をのぞいた部分の行列について, 同じことを繰りかえす.

簡約行列への変形の手順

- 各ピボット j を 1 にする.
  - 操作 I $\boxed{\text{j}} : \boxed{\text{j}} \times (\bullet)$.
- 各ピボット j について, 上の i 行目成分を 0 にする.
  - 操作 II $\boxed{\text{i}} : \boxed{\text{i}} + \boxed{\text{j}} \times (-\bullet)$.

ここまで来たよ

8 略解: n 元連立 1 次方程式

9 逆行列・3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積
- n 元連立 1 次方程式の解
- 逆行列
- 3 次元空間のベクトル

行基本変形による逆行列の決定 (3x3 以上) 高橋線形 §4.4

行列の行基本変形

$m \times n$ 行列で

操作 I(i,a) i 行目に定数 a をかける $(a \neq 0)$
操作 II(i,j,b) i 行目に j 行目の b 倍を加える
操作 III(i,j) i 行目と j 行目を入れ替える

操作 I の, 行列 P を A の左からかけることによる表現

$$PA = i) \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

操作 II の, 行列 P を A の左からかけることによる表現

$$PA = \begin{array}{r} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & b & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

操作 III の, 行列 P を A の左からかけることによる表現

$$PA = \begin{array}{r} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

k 回の変形の繰りかえしは
$P_k \cdots P_3 P_2 P_1 A$.
よって $A^{-1} = P_k \cdots P_1$ であるはず.

逆行列を簡単に求める方法 高橋線形 p.89

$n \times (2n)$ 行列 $[A|E]$ を簡約行列に変形する. $\mathrm{rank} A = n$ なら,

$$[A|E] \xrightarrow{\text{行基本変形 } k \text{ 回}} [(P_k \cdots P_1 A)|(P_k \cdots P_1 E)] = [E|B]$$

となるが, $B = A^{-1}$ である.

例題

Example

基本変形による逆行列の求め方

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = ?$$

高橋線形問題 4.13, 演習問題 4.5 https://bit.ly/rrmatrix

ここまで来たよ

8 略解: n 元連立 1 次方程式

9 逆行列・3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積
- n 元連立 1 次方程式の解
- 逆行列
- 3 次元空間のベクトル

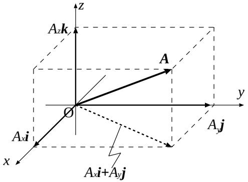
3 次元の座標系

高橋線形 p.112

ここまで, 何次元のベクトルも計算は同じ, という説明をしてきたが, ここでは 3 次元=空間のベクトルと思ったときの話.
互いに直交する x,y,z 軸 $= x_1, x_2, x_3$ 軸.

3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \begin{array}{l} x\text{-成分} \\ y\text{-成分} \\ z\text{-成分} \end{array}$$



ふつうは, 右手を開いたときの親指方向を x, 人指し指方向を y, 中指方向を z 軸の正の方向にとる. 高橋線形 p.115
‘xyz 軸は右手系’

$x' = x, y' = y, z' = -z$ とした座標系は左手系. あまり使わない.

基本ベクトル

高橋線形 p.113

単位ベクトル: 大きさが 1 のベクトル.
x,y,z 軸の正の向きの単位ベクトルを基本ベクトルといい,

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} = \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} = \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と書く.
これらを用いると,

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = a_{\mathrm{x}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}.$$

復習:内積 (スカラー積)

高橋線形 pp.15,24,113

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: 3 次元ベクトル (実数)

内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_{\mathrm{x}} & a_{\mathrm{y}} & a_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{z}}.$

実は, 次の意味がある.

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \cos\theta.}$$

ここで,

長さ $|\boldsymbol{a}| = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})^{1/2}$.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ.

使用例: 仕事 (スカラー) は, 力 (ベクトル) と変位 (ベクトル) の内積.

$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$

内積の使い道: ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角度

内積の式を逆に使うと,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\times\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}}$$

で, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角度 θ が計算できる.

内積の使い道: $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の類似度みたいなもの

n 次元ベクトルにも内積やなす角 θ が定義される.

- 2 つのベクトルの向きが近いほど正で大きい. $\cos 0 = 1$
- 2 つのベクトルの向きが反対だと負. $\cos\pi = -1$
- 2 つのベクトルの向きが直交してると零. $\cos(\frac{\pi}{2}) = -1$. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

例: 支出パターン $= \begin{bmatrix} \text{外食費} \\ \text{お酒代} \\ \text{お菓子代} \\ \text{食材費} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 50 \\ 200 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 100000 \\ 23000 \\ 500 \\ 20000 \end{bmatrix}$ は似てる? θ が 0 に近いなら似てる.

L09-Q1

Quiz(3 次元ベクトルの内積となす角)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|$, および $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ のなす角 θ は?

外積 (ベクトル積)

高橋線形 §5.5

2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して, 次の式で表わされるベクトル $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のことを外積という. この記号 '×' は新しい記号. (実数のふつうの 'かける' とたまたま同じ文字).

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{\mathrm{x}} \\ b_{\mathrm{y}} \\ b_{\mathrm{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{\mathrm{y}} & b_{\mathrm{y}} \\ a_{\mathrm{z}} & b_{\mathrm{z}} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{\mathrm{z}} & b_{\mathrm{z}} \\ a_{\mathrm{x}} & b_{\mathrm{x}} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{\mathrm{x}} & b_{\mathrm{x}} \\ a_{\mathrm{y}} & b_{\mathrm{y}} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

x, y, z が循環的に入れ替わってることに注意. $x \to y \to z \to x$.

L09-Q2

Quiz(3 次元ベクトルの外積)

外積 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ を求めよう.

計算方法

ふつうの数であるかのように展開してよい.

$$\text{超注意 } \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \text{ よって } \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c},$$

$$(c\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = c \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

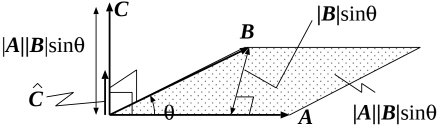
$$\text{計算例 } (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

覚え方　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =$

外積の図形的な意味

$$\boxed{\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,(\sin\theta)\,\hat{\boldsymbol{c}}}$$

ただし, $\hat{\boldsymbol{c}}$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルで, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{c}} \rangle$ が右手系をなす (右手系の座標系 $\langle \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} \rangle$ を π を越えて開かずに得られる) もの.
別の言い方:
$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$ で, $\boldsymbol{c}$ の向きは, $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に回る右ねじが進む向き.



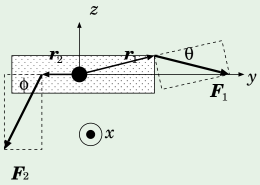
大きさは $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のはる平行四辺形の面積.

- 剛体の力学のトルク=力のモーメント $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.

L09-Q3

Quiz(3 次元ベクトルの外積)

原点を中心に回転するやじろべえを考える. $\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を, $\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を加える. 右の図 (ベクトルは正確じゃないです) のように x 軸の正の向きから見たとき, やじろべえは時計回り, 反時計回りどちらに回るか考えよう.



スカラー 3 重積

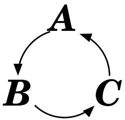
$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ はベクトル．ということは，$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラーになる．

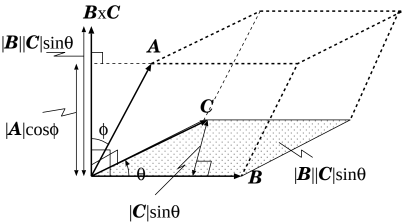
$$\boxed{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})}$$

をスカラー 3 重積という．

図形的に考えると，絶対値 $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ は，$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする 平行六面体の体積．

絶対値は体積だから，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を入れ替えても等しい．実は，循環的に変えたときは $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ の符号も同じ．





$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}).$$

L09-Q4

Quiz(スカラー 3 重積)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよう.
2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよう.

連絡

しばらく情報メディアセンターの Moodle と, Maple T.A. を併用.
どちらからログインしてやってもかまいません.
検索「龍谷 Moodle」
→ 火 3 19 前 樋口 線形代数
`https://moodle.media.ryukoku.ac.jp/course/view.php?id=2201`

サポート

`https://maple.st.ryukoku.ac.jp/`

- 樋口オフィスアワー火 5(1-507, 1-542)
- 学科チューター 水昼, 1-342
- 初年次学習支援センター 火水 12:45-15:45, 生協コンビニ地下