# ベクトルの内積

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L01(2022-04-08 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-04-06 Thu 14:55 JST hig"

今日の目標

- 授業の到達目標/合格条件を説明できる
- Mobius で学習できる
- 2,3 次元ベクトルの内積が計算できて利用できる

# ここまで来たよ


- はじめに
  - この授業どんなのり?

1 ベクトルの内積
  - ベクトルの表示と演算の復習
  - Mobius で問題演習
  - ベクトルの内積

# 線形代数とは?

## 到達目標 (アバウト)

- シラバスより
  - 行列の基本的な計算ができる。
  - ベクトルや直線などの図形の移動や拡大縮小が行列で表現できる。
  - 連立 1 次方程式を行列で表現し解くことができる。
- 教科書の前半の問題が何も見ないで楽勝で解ける.
- 教科書解読ベースで大学の数学の学び方ができる.

## 線形代数とは?

- ベクトル (vector) の続き. 2,3 次元でなく $n$ 次元で. 行列 (matrix) も.
- 理系の学科はだいたい 1 年でやる.「行列と行列式」みたいな名前も.
- 線形代数と確率は人工知能, 機械学習の大前提.

## 数理のカリキュラムの中での線形代数

必修. 後続 線形代数及び演習 II. 数学, 現象,DS, 情報科学ぜんぶで必要.

# 科目ののり

- 週 2 回水 1 金 1
- ノート PC 持参. 問題を解くための手書きノート用意.
- 毎回の小テスト driven で
- 連絡は Teams チームコード `tdhhn29`
- `https://hig3.net` → `https://moodle.hig3.net`
- 欠席の事前事後連絡不要. やむを得ない理由で成績的に考慮されたい場合は Moodle から欠席届 (最終回の授業まで)

## 相談できるところ

- オフィスアワー樋口 前期火昼, 1-507 or Teams chat a00010
- Math ラウンジ (1 号館 5 階 1-536,538) 毎日昼休みは大学院生常駐

# 科目の成績ののり

(シラバスより)
100 ピーナツ=小テスト 90 ピーナツ + 平常点 10 ピーナツ
(詳細)
90 ピーナツ=30 回 × 毎朝のトライアル (小テスト)3 ピーナツ
全学ルールとして 60 ピーナッツ以上が合格です (履修要項参照).
成績は研究室配属や奨学金に影響することがあります. (企業などに提出する) 成績証明書は SABC の区別で載り, 不合格科目は載りません.

# ここまで来たよ


- はじめに
  - この授業どんなのり?

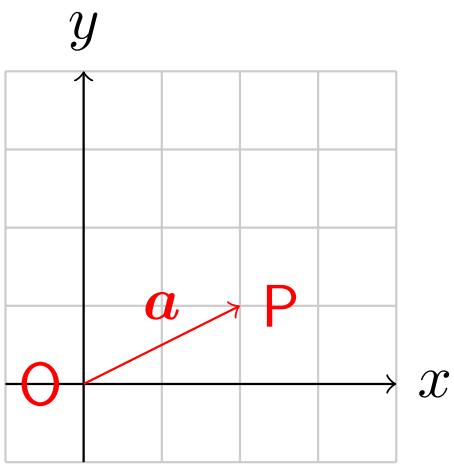
1. ベクトルの内積
   - ベクトルの表示と演算の復習
   - Mobius で問題演習
   - ベクトルの内積

# ベクトルの表示

ベクトルを $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ のように書く. 細字 $a$ でなく太字 $\boldsymbol{a}$ で. 手書きなら二重線で. 成分は縦に並べて (横は別の意味がある). $3, 4, \ldots$ 次元ベクトルも同じ.

始点 を O, 終点 を P とする矢印を, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ という.
平行移動して重なるベクトルは同じ.

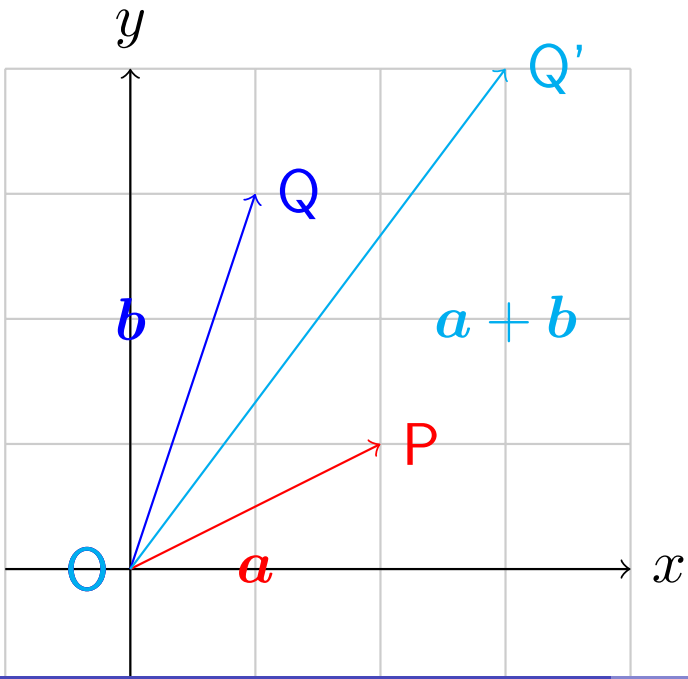
例えば $\mathrm{A}(2,5)$, $\mathrm{B}(4,6)$, なら,
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$2$ が $x$ 成分, $1$ が $y$ 成分.
教科書では角括弧 bracket [ ]. Web 教材は (). 翻訳して.



# ベクトルの和

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,
$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ'}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
のとき, ベクトルの和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は

$\mathrm{OP}, \mathrm{OQ}$ を 2 辺とする平行四辺形を作って, もう 1 個の頂点を $\mathrm{Q'}$ とすると, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$.



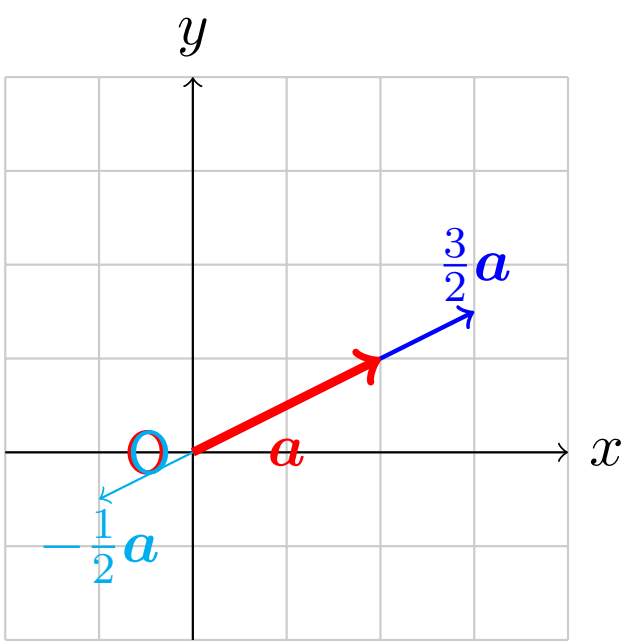

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.
$3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに加える.

# ベクトルの定数倍

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, 実数 $k = 3$ に対して, ベクトルの定数倍 $k\boldsymbol{a}$ は長さが $\boldsymbol{a}$ の長さの $|k|$ 倍のベクトルで,
$k > 0$ なら $\boldsymbol{a}$ と同じ向き, $k < 0$ なら $\boldsymbol{a}$ と逆の向き.

$k\boldsymbol{a} = k\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot k \\ 1\cdot k \end{bmatrix}$.
$3, 4, 5, \ldots$ 次元ベクトルでも成分ごとに $k$ 倍する.

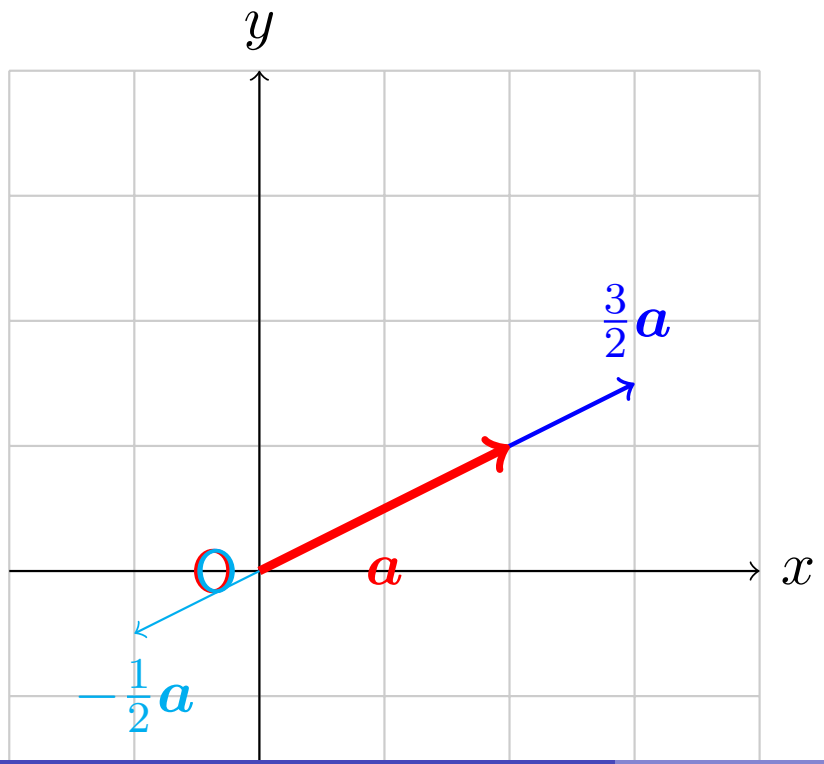
$k = 0$ ならゼロベクトル $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.



# ベクトルの平行

## (定義) ベクトルの平行

零ベクトルでない $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が平行であるとは,
ある実数 $k$ が存在して
$k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ とかけることをいう.
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は, $k > 0$ なら同じ向き, $k < 0$ なら逆の向きという.



# ここまで来たよ


- はじめに
  - この授業どんなのり?
- 1 ベクトルの内積
  - ベクトルの表示と演算の復習
  - Mobius で問題演習
  - ベクトルの内積

# Mobius で問題演習

`https://mobius.st.ryukoku.ac.jp`
Mobius にログイン. 初回はパスワードリセットが必要. 全学統合認証とは別のパスワード.
フォローアップ課題 (4/20 まで) をやりたくなるけど, ぐっとこらえて線形代数.

# ここまで来たよ

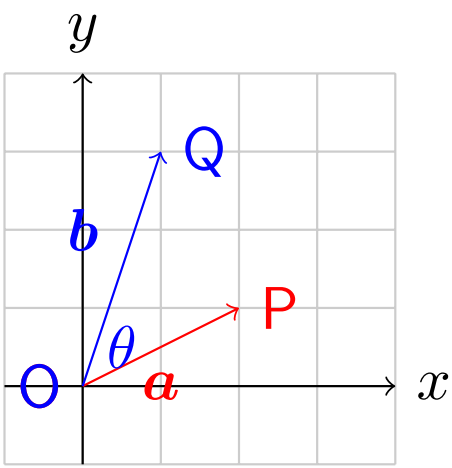

- はじめに
  - この授業どんなのり?
- 1 ベクトルの内積
  - ベクトルの表示と演算の復習
  - Mobius で問題演習
  - ベクトルの内積

# ベクトルの内積

加藤 線形代数 §7

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}$ の長さを $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta$ とするとき,
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$
と定義する.




$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 2 \times 1 + 1 \times 3$ のように定義する.

$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ と定義する.
$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ をベクトルの絶対値, 長さ という.

内積はスカラー積ともいう.
加藤 線形代数 §7.1 では,
内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,
絶対値 $|\boldsymbol{a}|$ をノルム $\|\boldsymbol{a}\|$,
という名前/記号で表している.

# ベクトルの直交

(定義) ベクトルの直交

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta$ が $\pi/2$ であるとき，または，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するという．

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するという．

# 単位ベクトル

## (定義) 単位ベクトル

ベクトル $\boldsymbol{a}$ が $|\boldsymbol{a}| = 1$ であるとき, $\boldsymbol{a}$ は単位ベクトルであるという.

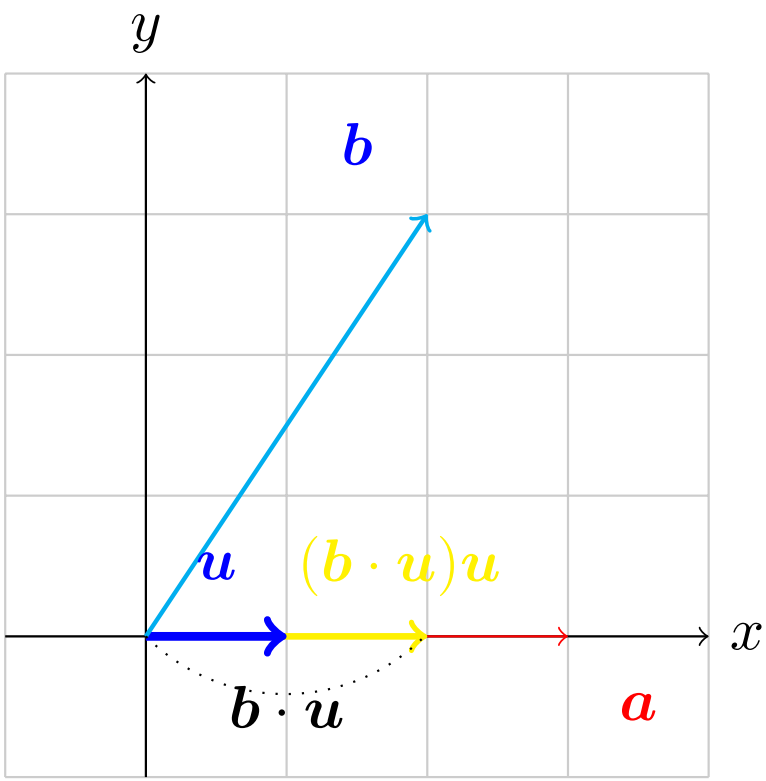
## (定理)

ベクトル $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, $\boldsymbol{a}$ に平行な単位ベクトルは $\pm\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ である.
特に, 同じ向きの単位ベクトルが $+\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$, 逆の向きの単位ベクトルが $-\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ である.

証明 …
直観的説明 …

# ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への射影

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 向き成分 ($\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{b}|\cdot 1\cos\theta$. (正負の実数)
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = (|\boldsymbol{b}|\cdot 1\cos\theta)\boldsymbol{u}$. (ベクトル)




向き成分 (スカラー射影) の意味: $\boldsymbol{a}$ 向きに進みたい人にとって, $\boldsymbol{b}$ はどのくらい意味 (符号つきの長さ) があるか?

L01-Q1

## Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルを求めよう.
3. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ 向きの成分を求めよう.
4. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ への射影を求めよう.
5. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ 向きの成分を求めよう.
6. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよう.

L01-Q2

## Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が $y$ 軸の正の向き, 東が $x$ 軸の正の向きであるような座標系を取る.

1. 南向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
2. 北西向き (北と西の中間 45° の向き) の単位ベクトルを成分表示で書こう.
3. 北西向きに 3km 進んだ. これは, 北向きにはどれだけ進んだことになる?
4. 北向きに 2km, 次に東向きに 1km 進んだ. これは, 北西向きにはどれだけ進んだことになる?

L01-Q3

## Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が $y$ 軸の正の向き, 東が $x$ 軸の正の向きであるような座標系を取る. あるサッカーコートのサイドラインは, 自陣の端 $\mathrm{F} = \begin{bmatrix} -30 \\ -45 \end{bmatrix}$, 敵陣の端 $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 30 \\ 45 \end{bmatrix}$ である (単位は m)
以下いずれも電卓使用可だけど小数じゃなく厳密な答で.

1. ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ の長さを求めよう. 単位をつけて答えよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
3. 味方のフォワードが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ まで運んだ. このフォワードは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか, 単位をつけて答えよう.
4. 味方のミッドフィールダーが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} -30 \\ 10 \end{bmatrix}$ までドリブルした. このミッドフィールダーは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか答えよう (近づけたなら正, 遠ざけたなら負で).

# ベクトルの外積

樋口さぶろお　`https://hig3.net`

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L02(2022-04-13 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-13 Wed 06:56 JST hig"

今日の目標

- ベクトルのスカラー射影, 射影を内積で計算できる
- 射影の意味を説明できる
- 3 次元ベクトルの外積が計算できる

# L01-Q1
## Quiz 解答: ベクトルの射影と向き成分

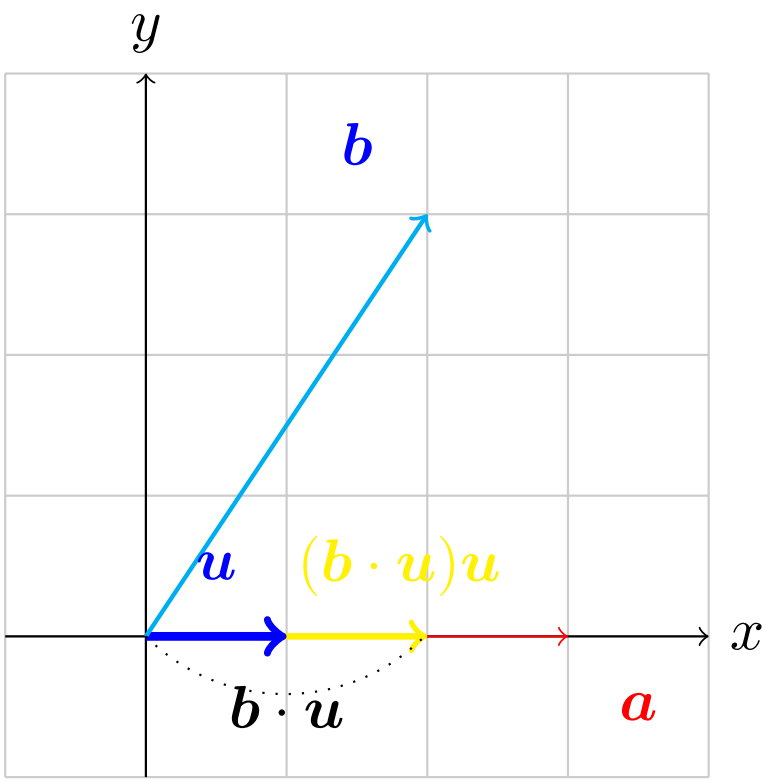
1. 同じ向きの単位ベクトルは $\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.
2. 逆向きの単位ベクトルは $\frac{-1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = \frac{-1}{\sqrt{30^2+10^2}}\begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$.

# ここまで来たよ

1. ベクトルの内積
   - ベクトルの内積
2. ベクトルの外積
   - 3 次元の座標系と基本ベクトル
   - 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

# ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への射影

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 向き成分 ($\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u} = |\boldsymbol{b}|\cdot 1\cos\theta$. (正負の実数)
ベクトル $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = (|\boldsymbol{b}|\cdot 1\cos\theta)\boldsymbol{u}$. (ベクトル)




向き成分 (スカラー射影) の意味: $\boldsymbol{a}$ 向きに進みたい人にとって, $\boldsymbol{b}$ はどのくらい意味 (符号つきの長さ) があるか?

L01-Q2

## Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルを求めよう.
3. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ 向きの成分を求めよう.
4. $\boldsymbol{a}$ の, $\boldsymbol{b}$ への射影を求めよう.
5. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ 向きの成分を求めよう.
6. $\boldsymbol{b}$ の, $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよう.

L01-Q3

## Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が $y$ 軸の正の向き, 東が $x$ 軸の正の向きであるような座標系を取る.

1. 南向きの単位ベクトルを成分表示で書こう.
2. 北西向き (北と西の中間 45° の向き) の単位ベクトルを成分表示で書こう.
3. 北西向きに 3km 進んだ. これは, 北向きにはどれだけ進んだことになる?
4. 北向きに 2km, 次に東向きに 1km 進んだ. これは, 北西向きにはどれだけ進んだことになる?

L01-Q4

## Quiz(ベクトルの射影と向き成分)

北が $y$ 軸の正の向き, 東が $x$ 軸の正の向きであるような座標系を取る.
あるサッカーコートのサイドラインは, 自陣の端 $\mathrm{F} = \begin{bmatrix} -30 \\ -45 \end{bmatrix}$, 敵陣の端 $\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 30 \\ 45 \end{bmatrix}$ である (単位は m)
以下いずれも電卓使用可だけど小数じゃなく厳密な答で.

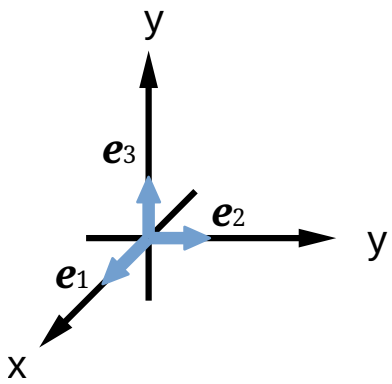
1. ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ の長さを求めよう. 単位をつけて答えよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{FE}}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよう.
3. 味方のフォワードが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ まで運んだ. このフォワードは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか, 単位をつけて答えよう.
4. 味方のミッドフィールダーが, ボールを $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から $\begin{bmatrix} -30 \\ 10 \end{bmatrix}$ までドリブルした. このミッドフィールダーは, サイドラインにそって測ると, 実質何 m, 敵ゴールラインにボールを近づけたことになるか答えよう (近づけたなら正, 遠ざけたなら負で).

# ここまで来たよ

1 ベクトルの内積
- ベクトルの内積

2 ベクトルの外積
- 3 次元の座標系と基本ベクトル
- 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

# 3 次元の座標系と基本ベクトル




$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の形の 3 つのベクトルを基本ベクトル 加藤 線形代数 p.25 という.

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

クロネッカーのデルタ 加藤 線形代数 p.25 $\delta_{ij} \overset{\text{定義}}{=} \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

# ここまで来たよ

1. ベクトルの内積
   - ベクトルの内積
2. ベクトルの外積
   - 3 次元の座標系と基本ベクトル
   - 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

# 3 次元ベクトルの外積 (ベクトル積)

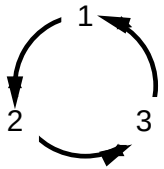
加藤 線形代数 §7. 研究

2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して, 次の式で表わされるベクトル $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のことを外積という. この記号 '×' は新しい記号. (実数のふつうの 'かける' とたまたま同じ文字).

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}$$

1 成分覚えれば, あとは, $1, 2, 3$ つまり $x, y, z$ が循環的 (cyclic) に入れ替わってることに注意.

$1 \to 2 \to 3 \to 1.$




別の書き方

$$(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3)$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3$$

# 外積の成分表示の覚え方

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3 \\ & a_1 & b_1 \\ & a_2 & b_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

L02-Q1

## Quiz(3 次元ベクトルの外積)

外積 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ を求めよう.

### 計算方法

ふつうの数であるかのように展開してよい.

$$\text{超注意 } \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \text{よって} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c},$$

$$(c\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = c \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

$$\text{計算例} (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

# 外積の図形的な意味

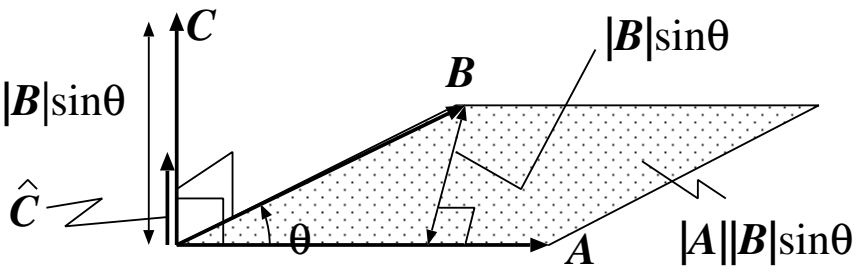
$$\boxed{\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,(\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{c}}}$$

ただし, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{c}} = \hat{\boldsymbol{C}}$ は, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトルで, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{c}} \rangle$ が右手系をなす ( 右手系の座標系 $\langle$親指, 人差し指, 中指$\rangle = \langle \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}} \rangle$ を $\pi$ を越えて開かずに得られる) もの.

別の言い方

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0.$

$\boldsymbol{c}$ の向きは, $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に回る右ねじが進む向き.




大きさは $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta =$ ($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ のはる平行四辺形の面積).

- 力のモーメント $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$.
- 電磁気学のフレミングの左手の法則 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.

例

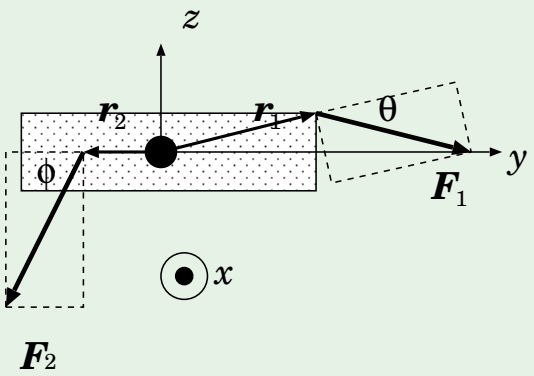
$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = ?$

$\boldsymbol{e}_1 \times (\boldsymbol{e} + 2\boldsymbol{e}_2) = ?$

L02-Q2

## Quiz(3 次元ベクトルの外積)

原点を中心に回転するやじろべえを考える. $\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を, $\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ の点に力 $\boldsymbol{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を加える. 右の図 (ベクトルは正確じゃないです) のように $x$ 軸の正の向きから見たとき, やじろべえは時計回り, 反時計回りどちらに回るか考えよう.



L02-Q3

## Quiz(3 次元ベクトルの外積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.

# スカラー 3 重積

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L03(2022-04-15 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-15 Fri 18:54 JST hig"

今日の目標

- 空間ベクトルのスカラー 3 重積を計算できる
- スカラー 3 重積の意味を説明し利用できる
- 内積と外積とスカラー倍の混ざった計算ができる

## L01-Q1

## Quiz 解答: ベクトルの射影と向き成分

1. $\boldsymbol{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは
   $\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.
2. $\boldsymbol{b}$ と逆向きの単位ベクトルは $-\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{-1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} = \frac{-1}{\sqrt{30^2+10^2}}\begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$.
3. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
4. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$.
5. $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 10$.
6. $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{5}\cdot 10\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.

## L02-Q1

## Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積

$$\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-6\\4\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\cdot(-5)-4\cdot(-2)\\-2\cdot(-6)-(-5)\cdot 1\\1\cdot 4+(-6)\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\17\\22\end{bmatrix}$$

# ここまで来たよ

2 ベクトルの外積

3 スカラー 3 重積
- スカラー 3 重積
- 直観的意味
- 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

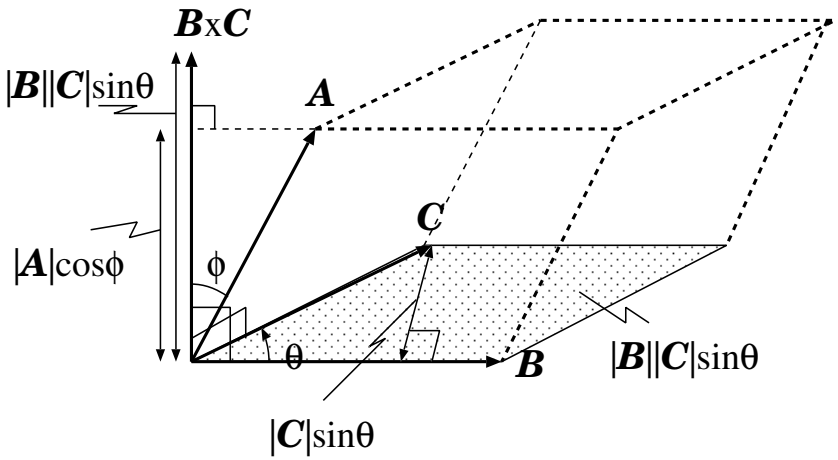
# スカラー 3 重積

外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ はベクトル.
ということは, 内積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ はスカラー (1 個の実数) になる.

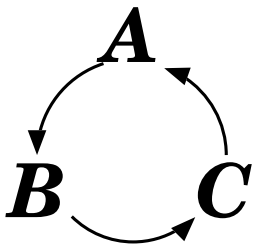
$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

をスカラー 3 重積という. ($|\boldsymbol{abc}|$ ともかく. この縦棒は絶対値とは別の記号)
図形的に考えると, 絶対値 $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする

平行六面体の体積.



絶対値 $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ は体積だから, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を入れ替えても等しい.
じゃあ符号は?
実は, 循環的に変えたときは $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ の符号も同じ.




1 つのベクトルを逆向きにしたり, ベクトルの順序を 1 ペア入れ替えたりすると, 符号が逆になる.

左手なら逆符号 | 符号つき体積

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-1\times(-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-1\times\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}).$$

L03-Q1

## Quiz(スカラー 3 重積)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする.

1. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよう.
2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよう.
3. $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ に親人中を重ねられるのは右手か左手か.

# ここまで来たよ

2 ベクトルの外積

3 スカラー 3 重積
- スカラー 3 重積
- 直観的意味
- 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

# スカラー 3 重積の直観的意味

$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) =$ 平行 6 面体の符号つき体積

「符号つき」=意味に応じて正負の値をとる

- $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) > 0 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ が右手系.
- $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一平面上
- $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) < 0 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ が左手系.

## 右手系左手系

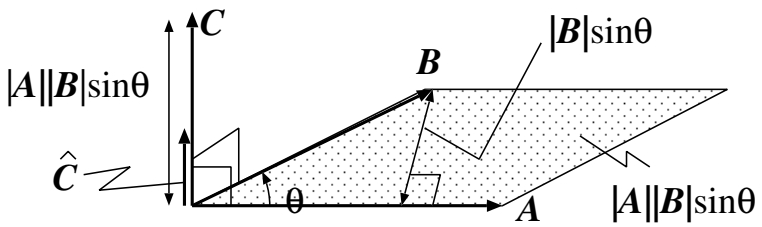
順序に意味のあるベクトルの 3 個組 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ が, 右手の $\langle$ 親, 人, 中 $\rangle$ に重ねられるとき, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は右手系をなすという. 左手に重ねられるとき左手系をなすという.

断らない限り, 3 次元の基本ベクトル $\langle \boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}, \boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}$ は右手系をなすように取る.

# 外積の直観的意味

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =$ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のはる平行四辺形の面積と向き
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で張った漁業用網の効率を伝えるもの

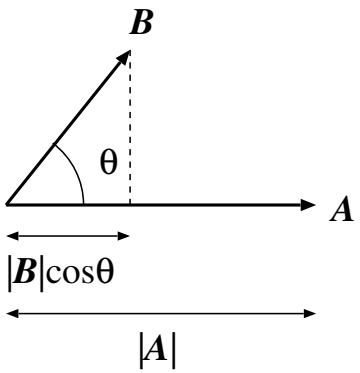
- 2 本の棒 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を使って網を張るような感じ.
- 網の正対する向きが $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向き. (表裏あり)
- 網の面積, つまり 平行 4 辺形の面積 が $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$. 2 本の棒が違う方向を向いてるほうがたくさん魚がとれる.
- フレミングの左手の法則とか, これで簡単に書ける. $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.



# 内積の直観的意味

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の相乗効果, 協力したときのパワー みたいなもの

- $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ それぞれの絶対値が大きいと, 内積の絶対値も大きい
- $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ の向きが
  - 近いほど正で大きい. $\cos 0 = 1$
  - 反対だと負. $\cos \pi = -1$
  - 直交してると零. $\cos \frac{\pi}{2} = -1$. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$.
- 仕事 (スカラー) は, 力 (ベクトル) と変位 (ベクトル) の内積.
- $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{b}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ は, $\boldsymbol{b}$ の「 $\boldsymbol{a}$ 向き成分」(符号つきの量)
- $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}}$ は, $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への射影 (ベクトル)



L03-Q2

## Quiz(ベクトルとスカラーの演算)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 次元ベクトル, $k$ をスカラー (ふつうの 1 個の実数のこと) とする.
次の式 (の計算結果) を, スカラー, 3 次元ベクトル, 間違った式に分類しよう.

1. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$
3. $(\boldsymbol{a} \cdot k) \times \boldsymbol{b}$
4. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot k\boldsymbol{c}$
5. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

# ここまで来たよ

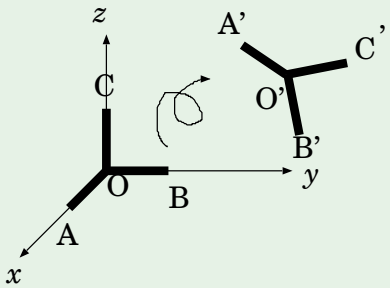
2 ベクトルの外積

3 スカラー 3 重積
- スカラー 3 重積
- 直観的意味
- 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

# L03-Q3

## Quiz(ベクトルの外積)

最初, 3 本足の金具 OABC が原点に図のように置かれていた. この金具を曲げたり壊したりせずに, 空中に投げたところ, ある瞬間には, $\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}$ は $\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$ の向き, $\overrightarrow{\mathrm{O'C'}}$ は $\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}$ の向きになっていた.




1. この瞬間の $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ の向きの単位ベクトルを求めよう.

*Hint* $\overrightarrow{\mathrm{O'B'}}$ は平面 $\mathrm{O'B'C'}$ の法線ベクトル.

L03-Q4

## Quiz(3 次元ベクトルの外積)

あまり柔軟性のない人が, 片方の手を空中に差し出したところ,
手のひらから

- 親指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- 人差し指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$,
- 中指に向かうベクトルが $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

だった.
この手は右手か左手か.

# 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L04(2022-04-20 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-20 Wed 07:13 JST hig"

今日の目標

- 直線, 平面のパラメタ表示が説明できる
- 法線ベクトルを用いた直線, 平面の方程式が説明できる



## Quiz 解答: スカラー 3 重積

1. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} +2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. 面積は, $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.
2. スカラー 3 重積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = -2$
   よって体積はその絶対値 $|-2| = 2$.
3. スカラー 3 重積の値が負だから, 左手.

L03-Q1

## Quiz 解答: ベクトルとスカラーの演算

1. へん
2. スカラー
3. ベクトル
4. スカラー
5. ベクトル

L03-Q2

## Quiz 解答: ベクトルの外積

1. $\langle \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}} \rangle$ は右手系. 回転後の $\langle \overrightarrow{\mathrm{O'C'}}, \overrightarrow{\mathrm{O'A'}}, \overrightarrow{\mathrm{O'B'}} \rangle$ も右手系.
   よって, 求める向きのベクトルは $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{\mathrm{O'C'}} \times \overrightarrow{\mathrm{O'A'}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$. 同じ向きの単位ベクトルを求めると, $\boldsymbol{u} = \frac{1}{|\boldsymbol{w}|}\boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{110}} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$.

# ここまで来たよ

3 スカラー 3 重積

4 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 直線のパラメタ表示と方程式
- 平面のパラメタ表示と方程式

# 空間内または平面内の直線のパラメタ表示

## $\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に平行な直線のパラメタ表示 (媒介変数表示)

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t$$

すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$　　($t$はパラメタ)

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

GeoGebra(動的幾何ソフトウェア,Web アプリ)

2D

`https://www.geogebra.org/m/skj88vSN`

3D

`https://www.geogebra.org/m/KYg7AZ7M`

# (平面内の) 直線の方程式

直線と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \boldsymbol{0}$) を, 直線の法 (線) ベクトル,normal vecvtor という. 直線の向き $\boldsymbol{a}$ を $\pm\frac{pi}{2}$ 回転して得られる.

**$\boldsymbol{c}$ を通り, 法線ベクトル $\boldsymbol{n}(\neq \boldsymbol{0})$ と垂直な直線の方程式**

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{n}$ に垂直である

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{n}=C$ (実数の定数) とおくと,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=C \qquad (C\text{は定数})$$

とも書ける. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, \boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ として成分で書くと,

$$ax+by=C.$$

https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P

L04-Q1

## Quiz(直線の方程式)

1. ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に平行で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ を通る直線のパラメタ表示と平面の方程式を求めよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に垂直で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}$ を通る直線のパラメタ表示と平面の方程式を求めよう.

# 直線を境界とする半平面の式

直線は平面を 2 つの半平面に分割する. 各半平面は不等式で指定される.

$\boldsymbol{n}$ と同じ側　　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}>0$

$\boldsymbol{n}$ と逆の側　　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}<0$

# ここまで来たよ

3 スカラー 3 重積

4 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 直線のパラメタ表示と方程式
- 平面のパラメタ表示と方程式

# (空間の中の) 平面のパラメタ表示

## $\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に平行な平面のパラメタ表示

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s$$

すなわち$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s + \boldsymbol{c}$　　$(t, s$はパラメタ$), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$は平行でない)

https://www.geogebra.org/m/YHmGKuJN

# (空間の中の) 平面の方程式

平面と垂直なベクトル (1 つとは限らない,$\neq \mathbf{0}$) を, 平面の法 (線) ベクトル normal vecvtor という. 平面に平行な (しかし互いに平行ではない)2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ から外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ で得られる.

**$\boldsymbol{c}$ を通り, $\boldsymbol{n}(\neq \mathbf{0})$ に垂直な平面の方程式**

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = C$ とおくと,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = C$$

$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ としてこの方程式を成分で書くと,

$$ax + by + cz = C.$$

https://www.geogebra.org/m/v2TedmJ2

L04-Q2

## Quiz(平面のパラメタ表示と方程式)

$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ を含む平面を考える.

1. パラメタ表示を求めよう
2. 方程式を求めよう
3. 点 $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ はそれぞれ平面に含まれるか調べよう.

# 平面を境界とする半空間の式

平面は空間を 2 つの半空間に分割する. 各半空間は不等式で指定される.

$\boldsymbol{n}$ と同じ側　　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}>0$

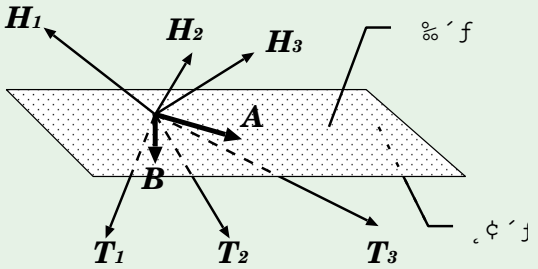
$\boldsymbol{n}$ と逆の側　　$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{n}<0$

平面の中の直線, 空間の中の平面が同じ式で扱えることに気づいただろう. これは, どちらも 1 次元減った,, 1 次式で書ける集合 (超平面という) だという共通点があるから.

L04-Q3

## Quiz(空間内の平面の分ける半空間)

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とする.




1. $|\boldsymbol{b}|$ を求めよう.
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよう.
3. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよう.
4. $\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a})$ を求めよう.
5. 原点 $\boldsymbol{0}$ を通り, ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方がのる平面は 1 つに定まる. (図では薄く塗られている. それは $xy$ 平面とは異なる). 図は, その平面を斜めから見たものである.
   ベクトルがこの平面の表裏どちら側を向いているかについて, $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \boldsymbol{H}_3$ のようなベクトルを表向き, $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3$ のようなベクトルを裏向きということにする.
   $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ が表向きか裏向きか考えよう.

# 0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L05(2022-04-22 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-22 Fri 15:53 JST hig"

今日の目標

- $2 \times 2$ 行列と $2 \times 1$ 行列 (ベクトル) の積が計算できる
- 1 次変換から行列, 行列から 1 次変換を求められる



L04-Q1

## Quiz 解答: 直線の方程式

1. パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (t\text{はパラメタ})$$

2. 法線ベクトルのひとつは $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. よって, 直線の方程式は

$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0.$$

すなわち

$$(x-5) - 3(y-7) = 0$$

3. 直線と平行なベクトルのひとつは $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. よってパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

方程式は

$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

すなわち

$$3(x-3) + (y-13) = 0.$$

L04-Q2

## Quiz 解答: 平面のパラメタ表示と方程式

1. パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t, s\text{はパラメタ})$$

2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は平面の法線ベクトルのひとつ. よって, 方程式は,

$$\left( \boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

すなわち

$$x - 13 = 0.$$

3. 方程式を満たしているかどうかチェックして, $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ は平面上にある. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ は平面上にない.

# ここまで来たよ

4 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

5 0 章平面と 1 次変換
- 1. 写像と変換
- 2. 1 次変換と行列
- 3. いろいろな 1 次変換 (途中まで)

# 写像 加藤 線形代数 §0.1

## 定義 1 (写像 (mapping))

加藤 線形代数 参照.

## 写像の記号

$$f : X \to Y$$

写像名 : 集合 (set) $\to$ 集合

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : 要素, 元 (element) $\mapsto$ 像 (image)

## 例 2

$\mathbb{R}$: 実数の集合
$\mathbb{R}^2 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\}$: 2 次元実数ベクトルの集合=平面 $E$.
直線のパラメタ表示 (前回) は写像.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$f : t \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

## 例 3

次は写像
$f : \{x | x > 0, x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \log x$

# 変換

## 定義 4 (変換)

集合 $X$ から $X$ 自身への写像を $X$ の変換 (transformation) という.

## 例 5

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

## 例 6

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

# ここまで来たよ

4 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

5 0 章平面と 1 次変換
- 1. 写像と変換
- 2. 1 次変換と行列
- 3. いろいろな 1 次変換 (途中まで)

# 1 次変換 加藤 線形代数 p.7

## 定義 7 (1 次変換)

$\mathbb{R}^2$ の変換で,

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

の形のものを (2 次元の)1 次変換, 線形変換 (linear transformation) という.

## 教科書修正 加藤 線形代数 p.7

誤 これらの点の座標の間には以下の関係式が成り立つ. (式) この場合...)

正 これらの点の座標の間に以下の関係式 (式) が成り立つ場合...)

## 教科書の間違い探し

末尾の奥付の, 版と年月日を確認しよう.

出版社や著者のサイトに正誤表がないか確認しよう

`https://www.chart.co.jp/goods/item/contents/43168.html`

## 定義 8 (行列 (1 次変換の記号))

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

はすべて同じ意味.
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を行列 (matrix) という.

# 例題

## 行列 $A$ と $\boldsymbol{x}$ から像 $A\boldsymbol{x}$

加藤 線形代数 例題 2(p.9), mobius K0.2, チーム課題 1

## $\boldsymbol{x}$ と像 $A\boldsymbol{x}$ から行列 $A$

加藤 線形代数 例題 1, 加藤 線形代数 例題 3, mobius K0.2, チーム課題 2

### mobuis での行列入力

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ = <x,y>
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ = < <a,c>|<b,d> > (or < <a|b>,<c|d> >)
縦ベクトルを横にならべたイメージ.

# ここまで来たよ

4 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

5 0 章平面と 1 次変換
- 1. 写像と変換
- 2. 1 次変換と行列
- 3. いろいろな 1 次変換 (途中まで)

# 対称変換 加藤 線形代数 例 1(p.7)

## 例 9 (対称変換)

- $x$ 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- $y$ 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 原点に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

# 相似変換と恒等変換 加藤 線形代数 例 1(p.8)

## 例 10 (相似変換)

- 相似比 $k$ の相似変換 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = kE$
- 恒等変換 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

# 回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

## 例 11 (回転変換)

- 一般角 $\theta$ だけ回転した回転変換 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

# 0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L06(2022-04-27 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-27 Wed 11:36 JST hig"

今日の目標

- 回転行列を (ノートを見なくても) 書ける
- 行列の積を (ノートを見なくても) 計算できる
- 写像と行列のの合成 (積), 結合法則の関係を説明できる

# ここまで来たよ

5 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 0 章平面と 1 次変換
- 3. いろいろな 1 次変換
- 4'. 直線の写像による像

# 回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

## 例 1 (回転変換)

原点のまわりに一般角 $\theta$ だけ回転移動する 1 次変換 $f_\theta$ を表す行列 (回転行列) は

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

なぜなら, 1 次変換であることを仮定して,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

から 行列 $R_\theta$ を決めるとそうなる.

覚え方

自分の言葉でどうぞ

L06-Q1

## Quiz(回転移動の 1 次変換の行列)

1. 点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ を, 原点を中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転移動した点 $\boldsymbol{x}'$ を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{x}'$ を, さらに, 原点を中心に $\frac{1}{3}\pi$ だけ回転移動した点 $\boldsymbol{x}''$ を求めよう.

加藤 線形代数 例題 6(p.14) mobius K0.3.40

# 写像が等しいとは 加藤 線形代数 p.12,191

## 写像の記号

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (domain) $\to$ 終域 (codomain)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : $\mapsto$ 像 (image)

「$f(a) = b$」「写像 $f$ による $a$ の像は $b$」「写像 $f$ は $a$ を $b$ に写す」

## 定義 2 (写像が等しい 加藤 線形代数 p.12)

$f : X \to Y$ と $g : Z \to W$ が等しい $(f = g)$ (写像として等しい) とは, $X = Z, Y = W$ であって, $X$ の任意の要素 $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ (要素として等しい) が成り立つことをいう.

## 1 次変換と行列の 1 対 1 対応

$\mathbb{R}^2$ の 1 次変換が $f = g$ であること
$\Leftrightarrow$ $f, g$ を表す行列の 4 個の数がそれぞれ等しいこと

# 1 次変換の合成 加藤 線形代数 p.10

## 定義 3 (合成写像 (composition))

加藤 線形代数 p.10

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$

合成写像 $h : X \to Z$ を $h(x) = g(f(x))$ で定義する.

$h = g \circ f$ と書く

$g \circ f \neq f \circ g$.

加藤 線形代数 例題 4(p.11)

- $X = Y = Z$ なら, $f, g, h$ は $X$ の変換. $h$ は合成変換
- $Y = Z = \mathbb{R}$ なら $f, g$ は関数 加藤 線形代数 p.191, $h$ は合成関数

# 加藤 線形代数 例題 5(p.11) でその上の部分を解説

## 例 4

1 次変換 $f$ を表す行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 1 次変換 $g$ を表す行列を $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ とする.
1 次変換 $g \circ f$ を表す行列 $C$ を求めよう.

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とする.

$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = B(A\boldsymbol{x}) = B \begin{bmatrix} x+y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x+y)-(2x-y) \\ -5(x+y)+3(2x-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x+3y \\ 1x-8y \end{bmatrix}$.

この 1 次変換を表す行列は $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$.

任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $C\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x})$ が成立する.

行列 $C$ を $B$ と $A$ の積 加藤 線形代数 p.22 とよび, 記号 $BA$ で表すことにしよう.

一般に $BA$ はどんな式で書ける?

# 行列の積 加藤 線形代数 p.22

一般の成分で考えて,

$$\begin{bmatrix} (ae+bg)x+(af+bh)y \\ (ce+dg)x+(cf+dh)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

より,

## 行列の積

$$\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

下左 = 下 ·左

$BA \neq AB$. なぜなら $g \circ f \neq f \circ g$ だから.

加藤 線形代数 例題 5

# 3 個以上の写像の合成 加藤 線形代数 p.12 ,3 個以上の行列の積

$f, g, h$ を写像とする.
任意の $x \in X$ に対して,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)), \quad ((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(f(x))$$

$\rightsquigarrow$ 写像は合成の順序によらない.

写像の結合法則 (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

この両辺を, 便利な記号として, $h \circ g \circ f$ と書いちゃう.

$f, g, h$ が 1 次変換とし, これらを表す行列を $A, B, C$ とする.
$h \circ g \circ f$ と $h \circ g \circ f$ の表す行列を考えて,
$\rightsquigarrow$ 行列の積の計算の順序によらない.

行列の積の結合法則 (associativity) $(C(BA)) = (CB)A$

これを, 便利な記号として, $CBA$ と書いちゃう.

L06-Q2

## Quiz(1 次変換の合成)

最初に $y = x$ に関する対称移動, 次に原点のまわりの角 $\frac{1}{4}\pi$ の回転移動, 最後に $y$ 軸に関する対称移動を行う.

1. 3 つの 1 次変換それぞれを表す行列を書こう
2. 3 つの 1 次変換の合成変換を表す行列を書こう

mobius K0.3.20

# ここまで来たよ

5 直線と平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 0 章平面と 1 次変換
- 3. いろいろな 1 次変換
- 4'. 直線の写像による像

# 直線の 1 次変換による像

## 定義 5 (写像による部分集合の像 加藤 線形代数 p.191)

$f : X \to Y$ を写像とする. 部分集合 $S \subset X$ について, $\{f(x)|x \in S\} \subset Y$ を, 写像 $f$ による $S$ の像という.

## 例 6

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される直線の, 行列 $A$ で表される 1 次変換による像は, ($A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ でない限り) 直線で,
$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{a}t + A\boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される.
なぜなら, $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, t \in \mathbb{R}\}$ の各点の $f$ による像を考えて,
$\{A\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}' = (A\boldsymbol{a})t + A\boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\}$.

L06-Q3

## Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

点 $\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ に平行な直線 $\ell$ を考える.
原点のまわりに, 角 $\frac{1}{6}\pi$ だけ $\ell$ を回転移動した直線 $\ell'$ のパラメタ表示を求めよう.

# 0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L07(2022-04-29 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-04-29 Fri 16:35 JST hig"

今日の目標

- 逆写像の定義と性質を説明できる
- 簡単な 1 次変換の逆変換を求められる
- 行列の逆行列が求められる

## L06-Q1

## Quiz 解答: 回転移動の 1 次変換の行列

1. $$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & +\cos\frac{2}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix}.$$

2. $$\boldsymbol{x}'' = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{3}\pi & -\sin\frac{1}{3}\pi \\ \sin\frac{1}{3}\pi & +\cos\frac{1}{3}\pi \end{bmatrix} \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ +\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

## L06-Q2

## Quiz 解答:1 次変換の合成

1. $y = x$ に関する対称移動 $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

2. 角 $\frac{1}{4}\pi$ の回転移動 $B = R_{\frac{1}{4}\pi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. $y$ 軸に関する対称移動 $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. $CBA = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = R_{\pi/4}$.

# ここまで来たよ

6 0 章平面と 1 次変換

7 0 章平面と 1 次変換
- 3. いろいろな 1 次変換
- 4'. 直線の写像による像

# 逆写像

## 写像

$$f : X \to Y$$

写像名 : 定義域 (domain) $\to$ 終域 (codomain)

$$f : a \mapsto b$$

写像名 : $\mapsto$ 像 (image)

「$f(a) = b$」「写像 $f$ による $a$ の像は $b$」「写像 $f$ は $a$ を $b$ に写す」

## 定義 1 (値域 (range) 加藤 線形代数 p.12)

終域の部分集合 $\{f(x)|x \in X\} \subset Y$ を $f$ の値域という.

## 定義 2 (上への (onto) 写像, 全射 (surjection) 加藤 線形代数 p.12)

$f$ は $X$ から $Y$ の上への写像 $\Leftrightarrow$ 値域=終域

## 定義 3 (1 対 1 の (one-to-one) 写像, 単射 (injection) 加藤 線形代数 p.13)

$f$ は 1 対 1 の写像 $\Leftrightarrow (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b))$

## 定義 4 (全単射 (bijection) 加藤 線形代数 p.13)

$f$ が全単射 $\Leftrightarrow$ $f$ が $Y$ の上への 1 対 1 の写像

## 逆写像

$f$ が $Y$ の上への 1 対 1 の写像であるとき
$Y$ の各要素 $y$ に対して $f(x) = y$ となる $X$ の要素がただひとつ定まる.
$g : y \mapsto x$ で写像 $g : Y \to X$ を定める.
$g$ を $f$ の逆写像といい, $f^{-1}$ とかく. (逆数ではない)

$$f^{-1} : Y \to X$$
$$f(x) \mapsto x$$

変換なら 逆変換

L07-Q1

## Quiz(逆写像)

1. 写像 $f : \{x|x > 0, x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \log x$ に逆写像があれば求めよう.
2. 写像 $g : \{x|x \neq 0, x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, $g : x \mapsto \log |x|$ に逆写像があれば求めよう.
3. 写像 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ に逆写像があれば求めよう.

# 逆写像の性質

逆写像の逆写像はもとの写像. すなわち $(f^{-1})^{-1} = f$

## 定義 5

恒等写像 (恒等変換) $\mathrm{id}_X : X \to X$
$\mathrm{id}_X : x \mapsto x$.

## 写像 (恒等変換)

$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ は 1 次変換で, 単位行列 $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ で表現される.

$f : X \to Y$, 1 対 1 で上への写像のとき,
$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$
$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$

# 1 次変換の逆変換の行列は?

## 意味から考える

**例 6**

$\frac{1}{6}\pi$ の回転変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の逆変換を表す行列は?

(意味から考えて) $f^{-1}$ は $-\frac{1}{6}\pi$ の回転変換.
よって

$$R_{-\frac{1}{6}\pi} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

# 1 次変換の逆変換の行列は?

## 逆行列を求める

**例 7**

1 次変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が 1 対 1 で $X$ の上への変換であるとする. $f$ が行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で表現されるとき, $f^{-1}$ を表現する $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ は?

考え方 1

$A$ は $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ だから,
$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ だから, ここから $B$ を求める.

考え方 2 $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ より

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

未知数 $p, q, r, s$ の 4 元 1 次方程式. これを解く.

## 逆行列

1 次変換 $f$ を表す行列が $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ のとき, 逆変換 $f^{-1}$ があるなら, それを表す行列を逆行列 (inverse) $A^{-1}$ といい,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

とかける.

検算容易.

L07-Q2

## Quiz(逆行列)

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ に対して, $BA = E$ を満たす行列 $B$ を求めよう.

加藤 線形代数 例題 4(p.36) | 加藤 線形代数 練習 7(p.36) (検算容易)

mobius K0.3.30

チーム課題 L07

# ここまで来たよ

6 0 章平面と 1 次変換

7 0 章平面と 1 次変換
- 3. いろいろな 1 次変換
- 4'. 直線の写像による像

# 直線の 1 次変換による像

## 定義 8 (写像による部分集合の像 加藤 線形代数 p.191)

$f : X \to Y$ を写像とする. 部分集合 $S \subset X$ について, $\{f(x)|x \in S\} \subset Y$ を, 写像 $f$ による $S$ の像という.

## 例 9 (直線のパラメタ表示)

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される直線の, 行列 $A$ で表される 1 次変換による像は, ($A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ でない限り) 直線で,
$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{a}t + A\boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される.
なぜなら, $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, t \in \mathbb{R}\}$ の各点の $f$ による像を考えて,
$\{A\boldsymbol{x}|A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}' = (A\boldsymbol{a})t + A\boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\}$.

法線との内積の方程式で決まる直線の像は, もう少し後で.

L07-Q3

## Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

点 $\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$ を通り, ベクトル $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ に平行な直線 $\ell$ を考える.
原点のまわりに, 角 $\frac{1}{6}\pi$ だけ $\ell$ を回転移動した直線 $\ell'$ のパラメタ表示を求めよう.

# モバイルアプリ紹介

龍大ポータルアプリ https://ru.portal.ac/ に加えて

## Moodle App

取得 https://download.moodle.org/mobile

指定する URL https://moodle.hig3.net/moodle

Moodle から通知がくる, 閲覧しやすい. テストや練習問題には使わないほうがいい?

## Gmail App

取得 https://www.google.com/intl/ja/gmail/about/

龍大 Gmail y220000@mail.ryukoku.ac.jp の通知と送受信. ポータル休講/教室変更, manaba も Moodle もこのアドレスに通知メール送る (ように設定できる).

# 第 1 章 行列の概念 (和・差・スカラー倍・積

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L08(2022-05-06 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-08 Sun 08:59 JST hig"

今日の目標

- 行列の型と成分と行ベクトル列ベクトルを読み取れる.
- 行列の和とスカラー倍を計算できる
- 行列の積を計算できる

## L07-Q1

### Quiz 解答: 逆写像

1. 実は, 上への 1 対 1 の写像になっている.
   $f^{-1} : \mathbb{R} \to \{x | x > 0, x \in \mathbb{R}\}$, $f^{-1} : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
2. $g$ は上への写像ではあるが, 1 対 1 の写像でないので, $g^{-1}$ は存在しない.
3. $h$ は上への写像ではない (1 対 1 の写像ではある) ので, $h^{-1}$ は存在しない.

## L07-Q2

### Quiz 解答: 逆行列

逆行列 $A^{-1}$ の定義と 2 次の逆行列の公式から,

$$B = A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 3 - 2\cdot 4} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & +\frac{2}{5} \\ +\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

$B$ の成分を未知数として 4 元連立 1 次方程式を解いても求められる.

## L07-Q3

## Quiz 解答: パラメタ表示された直線の 1 次変換による像

$\ell$ のパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\ell'$ のパラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{6}\pi & -\sin\frac{1}{6}\pi \\ \sin\frac{1}{6}\pi & +\cos\frac{1}{6}\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \cos\frac{1}{6}\pi & -\sin\frac{1}{6}\pi \\ \sin\frac{1}{6}\pi & +\cos\frac{1}{6}\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \cdots.$$

# ここまで来たよ

7 第 0 章 平面と 1 次変換

8 第 1 章 行列の概念 (和・差・スカラー倍・積
- 1. 行列とは何か
- 2. 行列の演算

# ◆行列とは

## 定義 1 (行列)

加藤 線形代数 定義 1-1(p.16)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

を $m$ 行 $n$ 列の 行列 という.
$a_{ij} \in \mathbb{R}$ を $A$ の $(i, j)$ 成分という 加藤 線形代数 p.17

加藤 線形代数 例 1(p.17), 練習 1,2(p.18) mobius K1.1.10

# 正方行列

## 定義 2 (正方行列)

加藤 線形代数 p.17

行列 $A$ が $n$ 行 $n$ 列であるとき, $A$ は $n$ 次の正方行列という.
$a_{11}, \cdots a_{nn}$ を対角成分という. 対角成分以外 $0$ の行列を対角行列という. 加藤 線形代数 §1.3

## 定義 3 (行ベクトル, 列ベクトル)

加藤 線形代数 p.17

- $n$ 行 1 列の行列を縦ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 $A$ の中の $\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$ を, 行列 $A$ の第 $j$ 列という 加藤 線形代数 p.16
- $A$ の第 $j$ 列を $m$ 行 1 列の行列すなわちベクトル (列ベクトル, 縦ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ を, $A$ の第 $j$ 列ベクトルという 加藤 線形代数 なし mobius <a,b,c>
- 1 行 $m$ 列の行列を横ベクトルという 加藤 線形代数 p.17
- 行列 $A$ の中の $a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}$ を, 行列 $A$ の第 $i$ 行という 加藤 線形代数 p.16
- $A$ の第 $i$ 列を 1 行 $n$ 列の行列すなわちベクトル (行ベクトル, 横ベクトル) と見なした $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ を, $A$ の第 $i$ 行ベクトルという 加藤 線形代数 なし 大注意:mobius <a|b|c>

加藤 線形代数 例 2(p.18), 練習 3(p.18) mobius K1.1.10

ベクトルは行列の一種だが, mobius では, 1 行 $m$ 列の行列<<a,b,c>> と, 列ベクトル (縦ベクトル)<a,b,c> を区別する, など.

数 (スカラー) は 1 行 1 列の行列とも見なせるが, mobius での入力は区別する.

# ここまで来たよ

7 第 0 章 平面と 1 次変換

8 第 1 章 行列の概念 (和・差・スカラー倍・積
- 1. 行列とは何か
- 2. 行列の演算

# ◆行列の相等，和，差，スカラー倍，零行列

- 行列の相等 加藤 線形代数 定義 2-1(p.19)
  - ある概念で, 2 つが「等しい」ことの定義は自明ではない．例: 三角形
- 行列の和と差 加藤 線形代数 定義 2-2(p.19)
  - 型の異なる行列の間の和や差は定義されない
- 行列のスカラー (定数) 倍 加藤 線形代数 定義 2-3(p.19)

なるべく行列の変数 $A, B, O$ のまま計算し，成分で書くのは最後の手段

加藤 線形代数 例 1, 例題 1,2, 練習 1,2(pp.20–21) mobius K1.2.10

# 零行列, ゼロ行列

## 定義 4 (零行列)

加藤 線形代数 定義 2-4(p.22) $O, \mathbf{0}$.

すべての成分が $0$ である行列.

## 定理 5 (零行列を含む行列の和)

加藤 線形代数 定理 2-1(p.22)

行列の型があっているとき,

$A + O = O + A$

$A + (-A) = (-A) + A = A - A = O$

# ◆行列の積 加藤 線形代数 定義 2-5

## 定義 6 (行列の積)

- 行列 $A$ ( $\ell \times m$ 型, 成分 $a_{ij}$ $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 $B$ ( $m' \times n$ 型, 成分 $b_{ij}$ $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 $A, B$ の積 $AB$ が定義され,

- 行列 $C = AB$ ( $\ell \times n$ 型, 成分 $c_{ij}$ $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

# 例

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\ell = 2, m = m' = 3, n = 2.$

$$\begin{aligned} c_{21} =& \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} \\ =& a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 1 \times 3 \end{aligned}$$

# 行列の積のルールの直観的おぼえ方

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}.$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{x}$ もこの一例と思える.

横ベクトルと行列の積. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix}$ $\rightsquigarrow$ 縦ベクトルと横ベクトルを区別する必要.

ベクトルの内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は (まだ) 一例とは思えない (型があってない).

# 単位行列 加藤 線形代数 p.24

## 定義 7 (単位行列)

$n$ 次の単位行列 $E$ or $E_n$ とは,
$n$ 次正方行列で
$(i,j)$ 成分が $e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ であるものをいう.

# 行列の積の演算法則 加藤 線形代数 定理 2 − 2

## 定理 8 (行列の積の演算法則)

以下, 積の型はあっているとする. $A$ は $m$ 行 $n$ 列とする.

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= A(BC) \quad \text{結合法則, 当たり前じゃない} \\
A(B+C) &= AB + AC \quad \text{分配法則 1} \\
(A+B)C &= AC + BC \quad \text{分配法則 2} \\
AE_n &= E_m A = A \quad \text{単位行列の性質} \\
AO_{nk} &= O_{mk}, O_{\ell m} A = O_{\ell n} \\
\text{略記} A^n &= \underbrace{AA \cdots A}_{n} \quad \text{行列のべき乗}
\end{aligned}
$$

## ほとんどの場合に成立しない=「成立しない」もの

$AB = BA$　反例 加藤 線形代数 例 5(p.23)

$AB = O$ならば$(A = O$または$B = O)$　反例 加藤 線形代数 例 9(p.26)

加藤 線形代数 練習 4,5,6(p.27), mobius K1.2.30

実数やベクトルの直観を使わず, 上の法則だけを使う

追加課金: 加藤文元, 大学教養線形代数 (青チャート), 数研出版, 2020.

例 $(AB)^2$

例 $(A - B)(A + B)$

# 第 1 章 行列の概念 (ブロック分け・上下三角行列)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L09(2022-05-11 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-11 Wed 07:50 JST hig"

今日の目標

- $\sum$ と添字で成分の計算ができる
- 行列をブロック分けして計算できる
- 上/下三角行列, 対角行列の定義に関わる証明ができる



# ここまで来たよ

8 第 1 章 行列の概念 (和・差・スカラー倍・積)

9 第 1 章 行列の概念 (ブロック分け・上下三角行列)
- 2. 行列の演算
- 3. 行列の種々の概念

# 行列の成分表示と $\sum$ の演算 加藤 線形代数 pp.17,24

$A = [a_{ij}]$:「行列 $A$ の成分として $a$, 行の添字として $i$, 列の添字として $j$ を使うよ」

$AB = [c_{ik}]$「積 $AB$ の成分を $c_{ik}$ と書くよ」

これを濫用 (?) して, 行列の和を $[a_{ij}] + [b_{ij}]$ と書いたりする.

$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$「行列 $A$ と $B$ の和の成分は, 成分の和である」

$k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$

行列のスカラー倍の成分, は成分のスカラー倍

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a_1 = 2$ | $a_2 = 3$ | $a_3 = 5$ | $a_4 = 7$ | $a_5 = 11$ |
| $b$ | $b_1 = 111$ | $b_2 = 107$ | $b_3 = 105$ | $b_4 = 103$ | $b_5 = 102$ |

$$\sum_{i=2}^{4} a_i = 3 + 5 + 7 = \sum_{j=2}^{4} a_j,$$

$$\sum_{i=2}^{4} 2^{a_i} = 2^3 + 2^5 + 2^7,$$

$$\sum_{i=0}^{2} a_{i+2} = 3 + 5 + 7,$$

$$\sum_{k=3}^{5} b_k = 105 + 103 + 102.$$

$$\sum_{i=0}^{2} b_{5-i} = 102 + 103 + 105,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_i = 3 \cdot 107 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 103,$$

$$i = 2, \sum_{j=2}^{4} a_i b_j = 3 \cdot 107 + 3 \cdot 105 + 3 \cdot 103,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_{4-i} = 3 \cdot 103 + 5 \cdot 105 + 11 \cdot 107,$$

$$\vdots$$

mobius K1.1.30

## 定義 1 (行列の積)

- 行列 $A$ ( $\ell \times m$ 型, 成分 $a_{ij}$ $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 $B$ ( $m' \times n$ 型, 成分 $b_{ij}$ $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 $A, B$ の積 $AB$ が定義され,

- 行列 $C = AB$ ( $\ell \times n$ 型, 成分 $c_{ij}$ $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

# 積の定義と結合則の証明

| 型 | $\ell \times m$ | $m \times n$ | $n \times p$ | $\ell \times n$ | $\ell \times p$ | $\ell \times p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 行列 | $A = [a_{ij}]$ | $B = [b_{jk}]$ | $C = [c_{kq}]$ | $AB = [d_{ik}]$ | $(AB)C = [f_{iq}]$ | $A(BC) = [g_{iq}]$ |

$$
\begin{aligned}
f_{iq} &= \sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{kq} \\
&= \sum_{k=1} \left( \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kq} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{p} \left( \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{m} \left( \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left( \sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kq} \right) = g_{iq}.
\end{aligned}
$$

(1) 分配法則 $(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})c_{13} = a_{11}b_{11}c_{13} + a_{12}b_{21}c_{13}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{m} g(k,j)\right)$ って, 結局 $p \times m$ 個に長方形状に並んだ $g(k,j)$ を全部加えろってこと.

$$\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{m} g(k,j)\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p} g(k,j)\right)$$

順序に意味ないから, $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq m, 1\leq k\leq p}$ みたいに書いちゃうこともある.

加藤 線形代数 章末問題 1(p.39)

# ◆行列の区分け (ブロック分け) 加藤 線形代数 p.27

加藤 線形代数 p.27 の解読

$n$ 行 $m$ 列の行列 $A = [a_{ij}]$ を, 縦横に格子状に分割する. 例えば $2 \times 2$.

$$A = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

$D, F, G, H$ は行列. 正方でなくても, 同サイズでなくてもいい. 加藤 線形代数 では $D = A_{11}$ のように書いてあるけど, これは行列 ($A$ の小行列 (submatrix)). 11 は行列につけた番号. $D = A_{11} = [d_{ab}]$.

$$AB = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & K \\ L & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & P \\ Q & R \end{bmatrix} = C$$

とする. ここで, $B$ の列の分割 ($J, L$ の境い目) は, $D, F$ の境い目と一致している必要がある.
$N, Q$ の境い目は $D, G$ の境い目, $N, P$ の境い目は $J, K$ の境い目と一致する (行列の型のルールに似てる)

## 行列の積を 2 段階に分けて, ブロックごとに計算できる

$N = DJ + FL$ 行列の積っぽいルール. 行列の積と和. 順序に意味あり

$DJ = [s_{tv}]$

$s_{tu} = \sum_u d_{tu} j_{uv}$ 行列の積. 成分で書いた

証明 成分で書いてみると両辺同じ 加藤 線形代数 例 10(p.28) $A, B$ が ブロック対角である場合

加藤 線形代数 練習 7(p.29) 加藤 線形代数 練習 8(p.29) ブロック対角である場合, ブロック分けで積を考えると楽, という例.

mobius K1.2.50

# ◆行列の区分け (列ベクトルへの分割) 加藤 線形代数 p.29

ブロック分けの小行列として, 列ベクトルを選んだ場合の一例

加藤 線形代数 p.29 に続いて追加.

3 次の正方行列 $C$, $A = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x_2}\ \boldsymbol{x}_3]$ に対して (注: この 1,2,3 は成分でなく, 1,2,3 番目のベクトルという意味).

$$CA = C[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x_2}\ \boldsymbol{x}_3] = [C\boldsymbol{x}_1\ C\boldsymbol{x}_2\ C\boldsymbol{x}_3].$$

mobius K1.2.50

ブロック分けの小行列として, 行ベクトルを選んだ場合の一例

3 次の正方行列 $B$ を 3 つの行ベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ に分割して $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{bmatrix}$ と書くと,

$$D = BA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}.$$

すなわち, $D = [d_{ij}]$ とすると, $d_{ij} = \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{x}_j$.

# ここまで来たよ

8 第 1 章 行列の概念 (和・差・スカラー倍・積)

9 第 1 章 行列の概念 (ブロック分け・上下三角行列)
- 2. 行列の演算
- 3. 行列の種々の概念

# ◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37

## 定義 2 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次正方行列に対して (← 成分は $a$ で書くという意味)

- $A$ が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- $A$ が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- $A$ が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0)$

$P \Leftrightarrow Q$: $P$ と $Q$ は同値, $Q$ は $P$ の必要十分条件, $P$ を $Q$ で定義する.
$P \Rightarrow Q$: $P$ ならば $Q$, $P$ は $Q$ の十分条件, $Q$ は $P$ の必要条件, $P$: 仮定, $Q$: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 偽 | 真 |

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 真 | 真 |

# 証明しよう

加藤 線形代数 章末問題 5(p.39)の簡単バージョン

L09-Q1

## Quiz(対角行列の積)

$n$ 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ ,$B = [b_{ij}]$ を考える.

1. $A, B$ が対角行列ならば, 積 $AB$ も対角行列であることを示そう. このとき, $AB$ の対角成分を求めよう.
2. $A$ が対角行列ならば, べき乗 $A^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ も対角行列であることを示そう. このとき, $A^k$ の対角成分を求めよう.

# 証明「示そう」の書き方

| | | |
|---|---|---|
| 仮定<br><br><br><br><br><br><br>結論 | 仮定<br>よって「仮定を定義で書き直したもの」<br><br><br><br>「結論を定義で書き直したもの」<br>よって, 結論 | 仮定<br>よって「仮定を定義で書き直したもの」<br><br>**(ギャップを埋める)**<br><br>「結論を定義で書き直したもの」<br>よって, 結論 |

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.
「仮定 $Q$ は前に持っていっていい」

L09-Q2

## Quiz(三角行列対角行列の和)

1. $A, B$ が $n$ 次の上三角行列ならば, 和 $A+B$ も $n$ 次の上三角行列であることを示そう
2. $A, B$ が $n$ 次の下三角行列ならば, 和 $A+B$ も $n$ 次の上三角行列であることを示そう
3. $A, B$ が $n$ 次の対角行列ならば, 和 $A+B$ も $n$ 次の対角行列であることを示そう.

スカラー倍, 差も同様.

加藤 線形代数 練習 8(p.37)

# 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L10(2022-05-13 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-12 Thu 21:03 JST hig"

今日の目標

- 転置行列の定義と計算が説明できる
- 正則行列の定義と計算が説明できる
- オンデマンドオンライン授業で学習できる

# ここまで来たよ

9 第 1 章 行列の概念 (ブロック分け・上下三角行列

10 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列)
- 転置行列|3. 行列の種々の演算
- 正則行列と逆行列|3 行列の種々の概念

# ◆転置行列 加藤 線形代数 定義 3-1(p.30)

## 定義 1 (転置行列)

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A = [a_{ij}]$ に対して, $n$ 行 $m$ 列の行列 $B = [b_{ji}]$ で

$$b_{ji} = a_{ij}$$

であるものを $A$ の転置行列 (transposed matrix) といい, ${}^{\mathrm{t}}A$ と書く.

$A$ の $t$ 乗 $A^t (t = 1, 2, \ldots)$ と間違えないために, 左上に立体で頭文字 t とかく.

## 例 2 (転置行列の例)

縦ベクトルの転置は横ベクトル, 横ベクトルの転置は縦ベクトル.

$$ {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ {}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} $$

加藤 線形代数 章末問題 1,2(p.39)

## 例 3 (転置行列の例)

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が縦ベクトルのとき,

$$ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} $$

縦ベクトルの内積　行列の積

# 転置行列の性質

## 定理 4 (転置行列の性質)

$A, B$ を行列, $k \in \mathbb{R}$ とするとき,

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A) &= A, \\
{}^{\mathrm{t}}(A+B) &= {}^{\mathrm{t}}A + {}^{\mathrm{t}}B, \\
{}^{\mathrm{t}}(kA) &= k\,{}^{\mathrm{t}}A, \quad \text{以上まあ当たり前} \\
{}^{\mathrm{t}}(AB) &= {}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A. \quad \text{超重要}
\end{aligned}
$$

# ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ の証明

加藤 線形代数 練習 1(p.31)

## 証明

型はあってる ( ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$ じゃあわない).

あとは成分が等しいことを言う (行列の相等 加藤 線形代数 定義 2-1(p.19)).

$A = [a_{ik}], B = [b_{kj}], AB = [c_{ij}],$

${}^tA = [p_{ki}]$, ${}^tB = [q_{kj}]$, ${}^t(AB) = [r_{ji}]$ とすると,

$p_{ki} = a_{ik}, q_{jk} = b_{kj}, r_{ji} = c_{ij}.$

L10-Q1

## Quiz(転置の積の成分表示)

$n$ 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ を考える.

1. $A^2$ の $(i, j)$ 成分を求めよう.
2. ${}^tAA$ の $(i, j)$ 成分を求めよう.
3. $A\,{}^tA$ の $(i, j)$ 成分を求めよう.

# ここまで来たよ

9 第 1 章 行列の概念 (ブロック分け・上下三角行列

10 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列)

- 転置行列|3. 行列の種々の演算
- 正則行列と逆行列|3 行列の種々の概念

加藤 線形代数 p.32

$n$ を固定したとき,
$n$ 次正方行列全体の集合は和, 差, 積 (, 転置) の操作のもとで「閉じている」(結果もその集合にはいる).

- $AB \neq BA$ を除けば実数全体の集合と同じ.
- $0$ に相当するのが零行列 $O$.
- $1$ に相当するのが単位行列 $E$.

体, 代数

# ◆正則行列と逆行列

加藤 線形代数 定義 3-2(p.32)

## 定義 5 (正則行列と逆行列)

$n$ 次正方行列 $A$ に対して, $XA = AX = E$ となる $n$ 次行列が存在するとき, $A$ を正則行列 (non-singular matrix) といい, $X$ は $A$ の逆行列 (inverse matrix) であるという.

### $A$ が正則かどうか判定する方法

$n \times n$ 元連立 1 次方程式 $AX = E$ を解く. 未知数 $X = [x_{ij}]$.

- 解 $X$ が求まったら $A$ は正則行列である. $X$ は逆行列.
- 解なしになったら $A$ は正則行列でない.

$\rightsquigarrow$ 2 次元の公式

正則行列である例, ない例 加藤 線形代数 例題 2(p.32)

## 命題 6

正則行列 $A$ の逆行列は 1 つに定まる. それを $A^{-1}$ とかく.

1 つに定まること (唯一性 (uniqueness)) の証明: $X, Y$ とおいて $X = Y$ という

# 正則行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-2(p.33)

## 定理 7 (正則行列の性質)

1. $A, B$ が正則行列 ならば, $AB$ も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $A$ が正則行列 ならば, $A^{-1}$ も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.

### 記法

$P, Q$: 命題

$P \Leftrightarrow Q$: $P$ と $Q$ は同値, $Q$ は $P$ の必要十分条件, $P$ を $Q$ で定義する.

$P \Rightarrow Q$: $P$ ならば $Q$, $P$ は $Q$ の十分条件, $Q$ は $P$ の必要条件, $P$: 仮定, $Q$: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 偽 | 真 |

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 真 | 真 |

# $P$ ならば $Q$ の証明: $P$ を仮定して $Q$ を導く

# 2 次の正則行列と逆行列 加藤 線形代数 (p.34)

## 定理 8 (2 次の正則行列と逆行列)

2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して, $\Delta = ad - bc$ とおくと,

1. $\Delta \neq 0$ ならば $A$ は正則行列で, 逆行列は $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
2. $\Delta = 0$ ならば $A$ は正則行列でなく, 逆行列は存在しない.

$\Delta \neq 0$ は, $A$ が正則行列であるための必要十分条件

$\Delta = \det A = |A|$ などと表し, $A$ の行列式 (determinant) という.
今後, 3 次以上の行列にも行列式が定義される 加藤 線形代数 第 4 章.
行列式は行列でない. 行列式は 1 個の実数.

加藤 線形代数 例題 4(p.36)

# 逆行列の性質 加藤 線形代数 定理 3-3(p.36)

## 定理 9 (正則行列の性質)

$A, B$ を $n$ 次の正則行列とする (逆行列はある).

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. (定義そのもの)
2. $AB = E$ ならば, $B = A^{-1}, A = B^{-1}$ (意味: 片側のチェックでいい)
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (再掲)
4. $(A^{-1})^{-1} = A$ (再掲)
5. $k \neq 0$ のとき, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ (わかる)

加藤 線形代数 練習 7(p.36)

$AB = E$ ならば, $B = A^{-1}, A = B^{-1}$ の証明 加藤 線形代数 練習 5(p.36)

# ブロック分けされた行列の逆行列 加藤 線形代数 なし

ブロック分けされた正方行列

$$A = \begin{bmatrix} D & O \\ O & H \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} J & O \\ O & M \end{bmatrix},$$

で $D, J$ が同じ次数の正方行列, $H, M$ が同じ次数の正方行列 だと積が考えられ,

$$AB = \begin{bmatrix} DJ & O \\ O & HM \end{bmatrix}$$

なのだった. 加藤 線形代数 例 10(p.28)

## ブロック対角行列の逆行列

正方行列 $A = \left[\begin{smallmatrix} D & O \\ O & H \end{smallmatrix}\right]$ で, $D, H$ が正則行列のとき, $A$ も正則行列で, 逆行列は

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & H^{-1} \end{bmatrix}.$$

# 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列・逆行列の応用)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L11(2022-05-18 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-18 Wed 12:29 JST hig"

今日の目標

- 平面の 1 次変換による直線の像を, パラメタ表示と方程式で求められる
- 正則でない行列の表す 1 次変換による直線の像を説明できる

L10-Q1

## Quiz 解答: 転置の積の成分表示

${}^{\mathrm{t}}A = [b_{ji}]$ とすると, $b_{ji} = a_{ij}$.

1. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$
2. $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$
3. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$

# ここまで来たよ

10 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列)

11 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列・逆行列の応用)
- 第 0 章 4'. 直線の写像による像
- 対角行列

# 直線の 1 次変換による像

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ について, 行列 $A$ で表せる 1 次変換 $f$ による像を
$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$ とする.
移動前 $\boldsymbol{x}$, 移動後 $\boldsymbol{y}$.
点でなく部分集合について,

## 定義 1 (写像による部分集合の像 加藤 線形代数 p.191)

$f : X \to Y$ を写像とする. 部分集合 $S \subset X$ について, $\{f(x)|x \in S\} \subset Y$ を, 写像 $f$ による $S$ の像という.

## パラメタ表示された直線

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ とパラメタ表示される直線の, 行列 $A$ で表される 1 次変換 $f$ による像は?

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上のパラメタ表示で書ける.
移動後の $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$. $A$ が正則行列なら, 左から $A^{-1}$ をかけて $A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$.
これをパラメタ表示に代入して,

$$A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} \quad (t \in \mathbb{R})$$

両辺に左から $A$ をかけて,

## 直線の 1 次変換による像のパラメタ表示

直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ の, 行列 $A$ で表される 1 次変換 $f$ による像は, 次のようにパラメタ表示される. $A\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, これは直線.

$$\boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{a})t + (A\boldsymbol{c}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

もっとも. なぜなら, $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, t \in \mathbb{R}\}$ の各点の $f$ による像を考えて,
$\{A\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\} = \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{a})t + A\boldsymbol{c}), t \in \mathbb{R}\}$.

L11-Q1

## Quiz(パラメタ表示された直線の 1 次変換による像)

パラメタ表示

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

をもつ $\mathbb{R}^2$ の直線 $\ell$ を考える.

1. 点 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ はそれぞれ $\ell$ 上にあるか調べよう.
2. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 $f$ による $\ell$ の像を求めよう.
3. 原点のまわりに反時計回りに $\frac{1}{2}\pi$ 回転する 1 次変換 $R_{\pi/2}$ による $\ell$ の像を求めよう.

## 直線の 1 次変換による像の方程式

方程式 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0$ で表される直線の, 行列 $A$ で表される 1 次変換 $f$ による像は?

パラメタ表示との関係 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$ なら, 方程式の $\boldsymbol{x}$ にパラメタ表示を入れると成立してる
まず内積をやめて転置を使って行列で書く. $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}=\ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{c}$.

$$ {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})=0$$

移動前の点 $\boldsymbol{x}$ が上の方程式にしたがう. ($A$ が正則行列なら) $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y}$.
これを代入し, $E=A^{-1}A$ で細工して

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}(A^{-1}\boldsymbol{y}-(A^{-1}A)\boldsymbol{c}) &= 0\\
{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{n}A^{-1}(\boldsymbol{y}-A\boldsymbol{c}) &= 0\\
{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n})(\boldsymbol{y}-A\boldsymbol{c}) &= 0\\
({}^{\mathrm{t}}(A^{-1})\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{y}-A\boldsymbol{c}) &= 0
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}$ は 1 次変換 $A$ で移動, $\boldsymbol{n}$ は ${}^{\mathrm{t}}(A^{-1})$ で移動.

L11-Q2

## Quiz(方程式で定まる直線の 1 次変換による像)

方程式

$$(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}) \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

で定まる $\mathbb{R}^2$ の直線 $\ell$ を考える.

1. 点 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ はそれぞれ $\ell$ 上にあるか調べよう.
2. 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 $f$ による $\ell$ の像を求めよう.
3. 原点のまわりに反時計回りに $\frac{1}{2}\pi$ 回転する 1 次変換 $R_{\pi/2}$ による $\ell$ の像を求めよう.

## 転置と逆

$({}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = ({}^{\mathrm{t}}A)^{-1}$ は成立するか?

アドバイス 難しい問はまず 2 次行列や例で考えてみる. 反例が見つかったらもうけもの.

## $A$ が正則じゃないとき直線の像は?

L11-Q3

### Quiz(対角行列の積)

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換を考える.

1. 直線 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の像を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の像を求めよう.
3. 点 $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の像を求めよう. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の張る正方形の像を想像しよう.

実は, $\mathbb{R}^2$ で

1. 正則行列の表す 1 次変換の値域は 自分の言葉で.
2. 正則でない行列の表す 1 次変換の値域は 自分の言葉で.

# 数学教職の人はどんな勉強?

- 教職ガイダンス
- 数学科でのゼミ (セミナー) とは?
- 自主ゼミとは

# ここまで来たよ

10 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列)

11 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列・逆行列の応用)
- 第 0 章 4'. 直線の写像による像
- 対角行列

# ◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37

## 定義 2 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

- $A$ が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- $A$ が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- $A$ が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0) \Leftrightarrow$「対角成分以外ゼロ」
- $A$ が対称行列 (symmetric matrix) $\Leftrightarrow A = + {}^{\mathrm{t}}A$.
- $A$ が反対称行列 (anti-symmetric matrix) $\Leftrightarrow A = - {}^{\mathrm{t}}A$.

$P \Leftrightarrow Q$: $P$ と $Q$ は同値, $Q$ は $P$ の必要十分条件, $P$ を $Q$ で定義する.
$P \Rightarrow Q$: $P$ ならば $Q$, $P$ は $Q$ の十分条件, $Q$ は $P$ の必要条件, $P$: 仮定, $Q$: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 偽 | 真 |

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 真 | 真 |

# 対角行列

## $n$ 次対角行列

具体的な表示

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

対角行列全体は, $n$ 次正方行列の中で, 扱いの簡単なファミリーになっている (部分ナントカ).

線形代数 II(後期), 代数 (3 年)

何か計算していて対角行列にできたらラッキー　対角化

線形代数 II(後期)

一方, 行列の例としては簡単すぎ (対角行列 $A, B$ に対しては $AB = BA$ とか).

# 証明の書き方

加藤 線形代数 章末問題 5(p.39)の簡単バージョン

L11-Q4

## Quiz(対角行列の積)

$n$ 次の正方行列 $A = [a_{ik}]$ ,$B = [b_{kj}]$ を考える.

1. $A, B$ が対角行列ならば, 積 $AB$ も対角行列であることを示そう. このとき, $AB$ の対角成分を求めよう.
2. $D$ が対角行列ならば, べき乗 $D^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ も対角行列であることを示そう. このとき, $D^m$ の対角成分を求めよう.

$A^0, A^{-m}$ の定義. $\mathrm{e}^A$ の定義.

証明「示そう」の書き方 1(構成的)

具体的に積を求め, それが条件を満たすこと言う.

## 証明「示そう」の書き方 2

具体的に積を求めず, 積が条件を満たすこと言う.

| | | |
|---|---|---|
| 仮定<br><br><br><br><br><br><br>結論 | 仮定<br>よって「仮定を定義で書き直したもの」<br><br><br><br>「結論を定義で書き直したもの」<br>よって, 結論 | 仮定<br>よって「仮定を定義で書き直したもの」<br><br>**(ギャップを埋める)**<br><br>「結論を定義で書き直したもの」<br>よって, 結論 |

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.

「仮定 $Q$ は前に持っていっていい」

# 証明の書き方と反例のみつけかた

## 対角行列と正則行列

対角行列は正則行列か? そうなら証明し, 違うなら反例を挙げよう.

### アドバイス

- 反例は 1 個でもあればいい
- 例で考えよう
- 低い次元で考えよう (反例なら 1 個あれば OK, 証明ならそこから一般の次元に).

## 対角行列の逆行列

対角行列の逆行列はどのような形か?

- 定義から
- やまかんで構成して証明する

# 第 1 章 行列の概念 (上下三角行列対角行列と証明)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L12(2022-05-20 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-20 Fri 06:47 JST hig"

今日の目標

- 空間の 1 次変換の行列を書ける
- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる

## L11-Q1

### Quiz 解答: パラメタ表示された直線の 1 次変換による像

1. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ は解 $t = 1$ を持つので $\boldsymbol{x}_1$ は $\ell$ 上にある.
   $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ は解 $t = 1$ を持たないので $\boldsymbol{x}_2$ は $\ell$ 上にない.
2. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. よって, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(t \in \mathbb{R})$.

## L11-Q2

### Quiz 解答: 方程式で定まる直線の 1 次変換による像

1. 代入してみると, $\boldsymbol{x}_1$ は方程式を満たす (方程式の解である) ので, $\boldsymbol{x}_1$ は $\ell$ 上にある. $\boldsymbol{x}_2$ は方程式を満たさない (方程式の解でない) ので, $\boldsymbol{x}_2$ は $\ell$ 上にない.
2. ${}^{\mathrm{t}}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.
$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = 0$$
3. ${}^{\mathrm{t}}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$.
$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

# ここまで来たよ

11 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列・逆行列の応用)

12 第 1 章 行列の概念 (上下三角行列対角行列と証明)
- 第 0 章 4'. 直線の写像による像
- 3 次元空間の 1 次変換
- 上三角行列, 下三角行列, 対角行列

# $A$ が正則じゃないとき直線の像は? I

L12-Q1

## Quiz(対角行列の積)

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^2$ の 1 次変換を考える.

1. 直線 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の像を求めよう.
2. 点 $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の像を求めよう.
3. 点 $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の像を求めよう. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ の張る正方形の像を想像しよう.

実は, $\mathbb{R}^2$ で

1. 正則行列の表す 1 次変換の値域は 自分の言葉で.
2. 正則でない行列の表す 1 次変換の値域は 自分の言葉で.

# ここまで来たよ

11 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列・逆行列の応用)

12 第 1 章 行列の概念 (上下三角行列対角行列と証明)
- 第 0 章 4'. 直線の写像による像
- 3 次元空間の 1 次変換
- 上三角行列, 下三角行列, 対角行列

# 3 次元空間の 1 次変換

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を 3 次の正方行列 $A$ で移動させることができる.

$z$ 軸を回転軸とする $xy$ 平面内の回転 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & +\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x$ 軸を回転軸とする $yz$ 平面内の回転 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$

$xz$ 平面 (平面 $y = 0$) に関する対称変換 (鏡映) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

平面 $x = y$ に関する対称変換 (鏡映) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

L12-Q2

## Quiz(3 次元の回転)

$y$ 軸を回転軸とする, $xz$ 平面内の角 $\theta$ の回転の線形変換 (1 次変換) を表す行列を書こう. ただし, どっちまわりを正の $\theta$ にするかは自由に決めてよい.

このページ内の 1 次変換は, すべて正則行列で表示されるものとする.

## 3 次元空間内の直線, 平面の 1 次変換による像

- 3 次元空間内のパラメタ表示された直線の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内のパラメタ表示された直線の場合と同じ式で求められる.
- 3 次元空間内のパラメタ表示された平面の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内のパラメタ表示された直線の場合と同じ式で求められる.
- 3 次元空間内の方程式で定まる平面の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内の方程式で定まる直線の場合と同じ式で求められる.

## $n$ 次元空間内の $k$ 次元部分空間の 1 次変換による像

- $n$ 次元空間内のパラメタ表示された $k$ $(1 \leq k \leq n)$ 次元部分空間の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内のパラメタ表示された直線の場合と同じ式で求められる.
- $n$ 次元空間内の方程式で定まる $n-1$ 次元部分空間の, 1 次変換による像は, 2 次元空間内の方程式で定まる直線の場合と同じ式で求められる.

# 3 次元の回転行列とオイラー角

2 次元の回転行列は 1 パラメタ $\theta$
3 次元の任意の回転は, 3 パラメタ必要 (フライトシミュレータでヨー, ピッチ, ローがあるのはそのため).
オイラー角 $\psi, \theta, \phi$ にとることが多い.
3 次元の回転行列は, 角 $\psi, \theta, \phi$ の平面回転の合成 (行列の積) で書ける.

$$
\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi & \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi - \cos\psi\cos\theta\sin\phi & \sin\psi\sin\phi + \cos\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

`http://irobutsu.a.la9.jp/mybook/ykwkrAM/sim/EulerAngle.html`

# ここまで来たよ

11 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列・逆行列の応用)

12 第 1 章 行列の概念 (上下三角行列対角行列と証明)
- 第 0 章 4′. 直線の写像による像
- 3 次元空間の 1 次変換
- 上三角行列, 下三角行列, 対角行列

# ◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37

## 定義 1 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列)

$n$ 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して

- $A$ が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i > j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- $A$ が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i < j \Rightarrow a_{ij} = 0)$
- $A$ が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0) \Leftrightarrow$「対角成分以外ゼロ」
- $A$ が対称行列 (symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow A = + {}^{\mathrm{t}}A.$
- $A$ が反対称行列 (anti-symmetric matrix) $\Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \Leftrightarrow A = - {}^{\mathrm{t}}A.$

$P \Leftrightarrow Q$: $P$ と $Q$ は同値, $Q$ は $P$ の必要十分条件, $P$ を $Q$ で定義する.
$P \Rightarrow Q$: $P$ ならば $Q$, $P$ は $Q$ の十分条件, $Q$ は $P$ の必要条件, $P$: 仮定, $Q$: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 偽 | 真 |

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

| $P\backslash Q$ | 真 | 偽 |
|---|---|---|
| 真 | 真 | 偽 |
| 偽 | 真 | 真 |

# 対角行列

## $n$ 次対角行列

具体的な表示

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}, a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

ギリシャ文字ラムダ, 小文字 $\lambda$, 大文字 $\Lambda$.
対角行列全体は, $n$ 次正方行列の中で, 扱いの簡単なファミリーになっている (部分ナントカ).
線形代数 II(後期), 代数 (3 年)
何か計算していて対角行列にできたらラッキー　対角化
線形代数 II(後期)
一方, 行列の例としては簡単すぎ (対角行列 $A, B$ に対しては $AB = BA$ とか).

# 証明の書き方

加藤 線形代数 章末問題 5(p.39) の簡単バージョン

L12-Q3

## Quiz(対角行列の積)

$n$ 次の正方行列 $A = [a_{ik}]$ ,$B = [b_{kj}]$ を考える.

1. $A, B$ が対角行列ならば, 積 $AB$ も対角行列であることを示そう. このとき, $AB$ の対角成分を求めよう.
2. $A$ が対角行列ならば, べき乗 $A^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ も対角行列であることを示そう. このとき, $D^m$ の対角成分を求めよう.

mobius K1.3.70

$A^0, A^{-m}$ の定義. $\mathrm{e}^A$ の定義.

証明「示そう」の書き方 1(構成的)

具体的に積を成分で求め, それが条件を満たすこと言う.

証明「示そう」の書き方 2(非構成的) 具体的に積を求めず, 積の成分が条件を満たすことを言う.

| | | |
|---|---|---|
| 仮定<br><br><br><br><br><br><br>結論 | 仮定<br>よって「仮定を定義で書き直したもの」<br><br><br><br>「結論を定義で書き直したもの」<br>よって, 結論 | 仮定<br>よって「仮定を定義で書き直したもの」<br><br>**(ギャップを埋める)**<br><br>「結論を定義で書き直したもの」<br>よって, 結論 |

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, $(P$かつ$Q) \Rightarrow R$ を示せばいい.
「仮定 $Q$ は前に持っていっていい」

# 証明の書き方と反例のみつけかた

## 対角行列と正則行列

対角行列は正則行列か? そうなら証明し, 違うなら反例を挙げよう.

### アドバイス

- 反例は 1 個でもあればいい
- 例で考えよう
- 低い次元で考えよう (反例なら 1 個あれば OK, 証明ならそこから一般の次元に).

## 対角行列の逆行列

対角行列の逆行列を求めよう

- やまかんで (または下心を隠して) 構成して, 定義を満たすことをいう

- 構成的 加藤 線形代数 章末問題 6(p.39) (両辺を成分で計算して等しいことを言う)
- 構成的 加藤 線形代数 練習 8(p.37), 加藤 線形代数 章末問題 4(p.37)
- 非構成的 加藤 線形代数 章末問題 5(p.39), 加藤 線形代数 章末問題 2(p39)
- そういう分類でない 加藤 線形代数 章末問題 1(p.39)

# 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式と行列)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L13(2022-05-25 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-25 Wed 15:31 JST hig"

今日の目標

- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる
- 連立 1 次方程式とその同値変形を行列で書ける

L12-Q1

## Quiz 解答: 対角行列の積

L12-Q2

## Quiz 解答:3 次元の回転

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

L12-Q3

## Quiz 解答: 対角行列の積

$AB = [c_{ij}]$ とする.

## 1 構成的

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ii} \delta_{ik} b_{kk} \delta_{kj}
\end{aligned}
$$

$\sum_k \delta_{ik} \bullet$ を実行して $k = i$ を代入することで,

$$
c_{ij} = a_{ii} b_{ii} \delta_{ij}.
$$

よって, $AB$ は $a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn}$ を対角成分とする対角行列.

1 非構成的
(仮定) $A, B$ を対角行列とする.
(式で) すなわち $i \neq k$ ならば $a_{ik} = 0$, $k \neq j$ ならば $b_{kj} = 0$ である.
$i \neq j$ とする.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

だが, $i \neq j$ なので, $i = k = j$ となる項はない. すなわち, $i \neq k$ または $k \neq j$. すなわち, $a_{ik} = 0$ または $b_{kj} = 0$. よって, $c_{ij} = 0$.
よって, $i \neq j \Rightarrow c_{ij} = 0$.
すなわち, $AB$ は対角行列. (このやり方では対角成分はわからない (非構成的)).
2 対角成分は, $(a_{11})^m, (a_{22})^m, \ldots, (a_{nn})^m$. (厳密には数学的帰納法で)

# 和 $\sum$ とクロネッカー記号 $\delta_{ij}$ の補足

## 和 $\sum$ 内のクロネッカー記号 $\delta_{ij}$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} F_{ijkl}G_{ijkm}\delta_{ij} \\
=&F_{ijkl}G_{i1km}\delta_{i1} + \cdots + F_{iikl}G_{iikm}\delta_{ii} + \cdots + F_{inkl}G_{inkm}\delta_{in} \\
=&0 + \cdots + 0 + F_{iikl}G_{iikm} \cdot 1 + 0 + \cdots + 0 \\
=&F_{iikl}G_{iikm}
\end{aligned}$$

$F, G$ が別の $\sum$ や $\delta$ を含んでいてもかまわない.

## $\sum$ と $\delta_{ij}$ の計算の例題

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{i1}F_{ijk} = ?$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\delta_{k1}F_{ijk} = ?$$

# 証明の書き方

$P$ ならば $R$, $P \Rightarrow R$ の証明

$P$ とする

$\vdots$

$\boxed{R}$

よって $P \Rightarrow R$.

$P$ ならば $(Q$ ならば $R)$, $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ の証明

$P$ とする

$\vdots$

$Q$ とする

$\vdots$

$R$

よって $Q \Rightarrow R$

よって $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

# 構成した者勝ちの証明の書き方

## 対角行列の逆行列

正則である対角行列の逆行列を求めよう

- やまかんで (または下心を隠して) 構成して, 定義を満たすことをいう

- 構成的 加藤 線形代数 章末問題 6(p.39) (両辺を成分で計算して等しいことを言う)
- 構成的 加藤 線形代数 練習 8(p.37), 加藤 線形代数 章末問題 4(p.37)
- 非構成的 加藤 線形代数 章末問題 5(p.39), 加藤 線形代数 章末問題 2(p39)
- そういう分類でない 加藤 線形代数 章末問題 1(p.39)

# ここまで来たよ

12 第 1 章 行列の概念 (上下三角行列対角行列と証明)

13 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式と行列)
- 1. 連立 1 次方程式と行列
- 2. 行列の基本変形

# ◆連立 1 次方程式の書き方 加藤 線形代数 p.41

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+ &\cdots+a_{1n}x_n = b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ &\cdots+a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\text{係数行列} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

$$\text{未知数ベクトル}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{定数項ベクトル}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$\text{拡大係数行列}\tilde{A} = \left[A|\,\boldsymbol{b}\right].$$

# ◆連立 1 次方程式を解く 加藤 線形代数 p.43

- 「系統的な」解法 (=拡大係数行列を入力, 解を出力とするアルゴリズム) そのもの自身を研究したい
  - その解法は必ず解を出力するのか?
  - 何ステップかかるのか?
- ここでは加減法のみを調べることにして, 代入法は考えない
- 最初に与えられたのと同じ個数 ($m$ 個) の等式をキープして, 同値変形だけを行っていく
- 特定の許された操作のみを行う.

# ここまで来たよ

12 第 1 章 行列の概念 (上下三角行列対角行列と証明)

13 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式と行列)
- 1. 連立 1 次方程式と行列
- 2. 行列の基本変形

# ◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

## 行列の行基本操作

$(i), (j)$ は拡大係数行列の行番号 ( 加藤 線形代数 では○の中に $i, j$)

(R1) $(i) \leftrightarrow (j)$
(R2) $(i) \times (\text{定数} c)$
(R3) $(i) \times (\text{定数} a) + (j)$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49)

mobius K2.1.30

# 第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L14(2022-05-27 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-07 Tue 10:59 JST hig"

今日の目標

- 行基本操作を説明できる
- 行階段形, その主成分, 階数の定義を説明できる
- 行簡約階段形の定義を説明できる



# ここまで来たよ

13 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式と行列)

14 第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形)
- 2. 行列の行基本変形

# ◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

## 行列の行基本操作 (elementary row operations)

$[i], [j]$ は拡大係数行列の行番号 ( 加藤 線形代数 では○の中に $i, j$)

(R1) $[i] \leftrightarrow [j]$, $i \neq j$
(R2) $[i] \times$ (定数$c$), $c \neq 0$
(R3) $[j] \times$ (定数$a$) $+ [i]$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49) mobius K2.1.30

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

# 行基本操作の可逆性

加藤 線形代数 p.49

行基本操作は, 別の行基本操作 (逆操作) で元に戻せる. だから連立 1 次方程式の変形としては同値.

(R1) $[i] \leftrightarrow [j]$ の逆操作は…
(R2) $[i] \times$ (定数$c$) $c \neq 0$ の逆操作は…
(R3) $[j] \times$ (定数$a$) $+ [i]$ $i \neq j$ の逆操作は…

# L14-Q1

## Quiz()

1. 連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 19 \\ 3x_1 + x_2 &= 24 \\ x_1 &= 7 \end{aligned}$$

を行列で書いたときの拡大係数行列 $\tilde{A}$ を右側に並べて書こう.

2. 下方向に, 1 度には R1, R2, R3 を 1 個ずつ使い ( $[1] \times (-3) + [3]$ のような 記号を記すこと), 最終的に $\begin{matrix} x_1 = \text{数} \\ x_2 = \text{数} \\ x_3 = \text{数} \end{matrix}$ になるように連立 1 次方程式と行列を変形していこう.

# (行) 階段形 (ref=row echelon form)

加藤 線形代数 定義 2-1(p.50)

## 定義 1 ((行) 階段形 (row echelon form))

$m$ 行 $n$ 列の行列 $A = [a_{ij}]$ が階段形 $\Leftrightarrow$ 加藤 線形代数 p.51) 参照

$A$ の階数 (rank) $r = \mathrm{rank} A$「段の個数」
主番号 整数 $1 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_r \leq n$「段の横方向の位置 (列番号)」
主列 $A$ の第 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ 列
$A$ の $i = 1, 2, \ldots, r$ 番目の主成分 (ピボット) 成分 $a_{ic_i}$「階段の角」

### そうである例

加藤 線形代数 例 1(p.50) ,$aE$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 練習 2(p.52)

### そうでない例

加藤 線形代数 注意 (p.51)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

# ◆ (行) 簡約階段形 (rref=reduced row echelon form)

加藤 線形代数 定義 2-2(p.52)

## 定義 2 ((行) 簡約階段形 (reduced row echelon form))

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ が簡約階段形

$\Leftrightarrow$

E1 $A$ が階段形
E2 主成分がすべて 1
E3 各主列における主成分の上下の成分がすべて 0

そうである例 加藤 線形代数 例 2(p.53)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

階段形だが簡約階段形でない例

加藤 線形代数 例 1(p.50), $aE(a \neq 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 練習 4(p.53)

# ◆行基本変形定理

加藤 線形代数 定理 2-1(p.53)

## 定理 3 (行基本変形定理)

任意の行列 $A$ は, 適当な行基本変形によって, 簡約階段形に変形できる.
変形後の行列 ($A$ の簡約階段化) はただ一つに定まる 加藤 線形代数 注意 (p.58).

驚いて疑ってほしい定理
証明+掃き出し法 加藤 線形代数 p.53–57 はそれ自身重要だが説明延期

# ◆行列の階数

加藤 線形代数 定義 2-3(p.58)

## 定義 4 (行列の階数)

行列 $A$ の簡約階段化の階数を, $A$ の階数といい $\mathrm{rank}A$ と書く.

加藤 線形代数 練習 8,9(p.59)

## 定理 5 (階数の性質)

$m \times n$ 行列 $A$ について, 次の不等式が成り立つ.
$\mathrm{rank}A \leq m, \mathrm{rank}A \leq n.$

# 第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形, 連立 1 次方程式)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L15(2022-06-01 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-05 Tue 08:19 JST hig"

今日の目標

- 掃き出し法で行簡約階段形に到達できる
- 拡大係数行列を行簡約階段形に変形することで, 連立 1 次方程式が解ける

# ここまで来たよ

14 第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形)

15 第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形, 連立 1 次方程式)
- 2. 行列の行基本変形
- 3. 連立 1 次方程式とその解

# ◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

## 行列の行基本操作 (elementary row operations)

$[i], [j]$ は拡大係数行列の行番号 ( 加藤 線形代数 では○の中に $i, j$)

(R1) $[i] \leftrightarrow [j]$, $i \neq j$
(R2) $[i] \times$ (定数$c$), $c \neq 0$
(R3) $[j] \times$ (定数$a$) $+ [i]$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49) mobius K2.1.30

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

# ◆行基本変形定理

加藤 線形代数 定理 2-1(p.53)

## 定理 (行基本変形定理の言い換え)

任意の行列 $A$ には簡約階段化 (適当な行基本変形によって $A$ から到達できる簡約階段形の行列) が存在する.
任意の行列 $A$ には簡約階段化は一意である (ただ一つに定まる) 加藤 線形代数 注意 (p.58).

驚いて疑ってほしい定理
一意性の証明 教科書でも省略 (サポートサイトにあるそう)
存在の証明 入力:$A$, 出力:$A$ の簡約階段化 であるようなアルゴリズム (あいまいさのない手続き) 加藤 線形代数 p.53–57 を与えることによる
このアルゴリズムは掃き出し法 (row reduction, ガウスの消去法 (Gaussian elimination) などと呼ばれ, 理論的理解に加え, 今後の手計算に使うので暗記する必要.

# 掃き出し法の概要 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

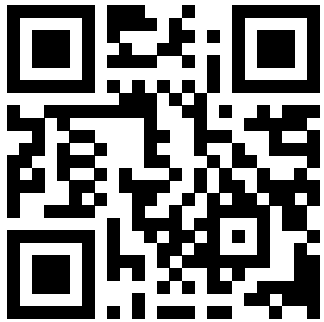
## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分を R2 ($[1] \times 1/c$) で 1 にする
(4) R3 $[1] \times (-a) + [i]$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の $a$ を零にする
(10) R3 $[1] \times (-a) + [i]$ で, ブロックのその列の上側を零にする
(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う
(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

## (スマホ) アプリで

https://bit.ly/rrmatrix



$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

# ここまで来たよ

14 第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形)

15 第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形, 連立 1 次方程式)

- 2. 行列の行基本変形
- 3. 連立 1 次方程式とその解

# ◆行基本変形と連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.60)

加藤 線形代数 定理 3-1(p.60)

## 定理 (行基本変形と連立 1 次方程式)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[A|\boldsymbol{b}]$ から, 行基本変形によって, $[B|\boldsymbol{b}']$ が得られるとき, 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ は同値.

どうせなら, 簡約階段形の $[B|\boldsymbol{b}']$ で解いた方が楽.

証明

- 操作前の連立 1 次方程式が成立するとき, 各操作後の連立 1 次方程式は成立する.
- 行基本操作の可逆性 加藤 線形代数 p.49 から, 操作後から操作前の連立 1 次方程式にも戻せる.

# (解が存在する場合の) 解き方

加藤 線形代数 例題 1(p.62)

## 簡約階段形の拡大係数行列を持つ連立 1 次方程式の解き方

1. 主列以外の列 ($\mathbf{0}, *, *$ になっている列) の変数 (未知数) を, 任意定数 (パラメタ) $c, d, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく. その個数を解の自由度 (degree of freedom) という.
2. 主列に対応する変数は, これらの任意定数で書ける.

例 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

加藤 線形代数 練習 2(p.54), 章末問題 2(p.72)

例

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

変数を $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ とする.

主列以外の列 ($\mathbf{0}$ や $*, *$ の列) について, $x_1 = c, x_4 = d, x_6 = e$ とおく.

$$\begin{aligned} x_1 &= c \\ 1 \cdot x_2 &= b_1 - 0 \cdot c - * \cdot d - * \cdot e \\ 1 \cdot x_3 &= b_2 - 0 \cdot c - * \cdot d - * \cdot e \\ x_4 &= d \\ 1 \cdot x_5 &= b_3 - 0 \cdot c - 0 \cdot d - * \cdot e \\ x_6 &= e \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -* \\ -* \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ -* \\ -* \\ 0 \\ -* \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L16(2022-06-03 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-03 Fri 06:38 JST hig"

今日の目標

- 拡大係数行列が与えられたとき, 解の存在の有無, 自由度を求められる
- 同次連立 1 次方程式が与えられたとき, 非自明な解の存在の有無を求められる



# ここまで来たよ

15 第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形, 連立 1 次方程式)

16 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式)
- ◆解の存在|3. 連立 1 次方程式とその解
- ◆同次連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解

# (解が存在する場合の) 解き方

加藤 線形代数 例題 1(p.62)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. 拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$.

## 簡約階段形の拡大係数行列を持つ連立 1 次方程式の解き方

1. 主列以外の列の変数 (未知数) を, 任意定数 (パラメタ) $c, d, \cdots \in \mathbb{R}$ とおく. その個数を解の自由度 (degree of freedom) という.
2. 主列に対応する変数は, これらの任意定数で書ける.

解の自由度が正 $\Leftrightarrow$ 無限個の解が存在する.

例 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

加藤 線形代数 練習 2(p.54), 章末問題 2(p.72)

# 解全体の集合は点?直線?平面?

解空間=解全体の集合 加藤 線形代数 p.160

以下, 任意定数 $c, d \in \mathbb{R}$.

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ (平面上の点)

解空間は 1 点, 自由度 0, 解は一意的に定まる

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & & 2 \\ x_2 = & & 3 \end{array} \rightsquigarrow 1 \text{ 点} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

解空間は 1 直線. 自由度 1, 無限個の解が存在する

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & & 2 - 5c \\ x_2 = & & c \end{array} \rightsquigarrow 1 \text{ 直線} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

解空間は 1 平面. 自由度 2, 無限個の解が存在する

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & & c \\ x_2 = & & d \end{array} \rightsquigarrow 1 \text{ 平面} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

未知数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ (空間内の点)

解空間は 1 点, 自由度 0, 解は一意に定まる

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & 2 \\ x_2 = & 3 \\ x_3 = & 11 \end{array} \rightsquigarrow 1\text{ 点}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

解空間は 1 直線. 自由度 1, 無限個の解が存在する

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & 2 - 7c \\ x_2 = & 3 - 9c \\ x_3 = & c \end{array} \rightsquigarrow 1\text{ 直線}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

解空間は 1 平面. 自由度 2, 無限個の解が存在する

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{rcl} x_1 = & 2 - 5c - 3d \\ x_2 = & c \\ x_3 = & d \end{array} \rightsquigarrow \text{平面}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d$$

# 解なしの例

拡大係数行列

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# ◆解の存在

加藤 線形代数 定理 3-2(p.65)

## 定理 1 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度)

$A$ を $m \times n$ 行列とする.
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (*) の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$ とする.

1. (*) が解を持たない $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A < \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.
2. (*) が解を持つ $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$. (†)
3. (†) が成り立つとき, (*) の解の自由度は $n - \operatorname{rank} A$.

(†) が成り立つとき, 解の自由度が 0 なら解は一意に定まる, 正なら無限個の解が存在する.

加藤 線形代数 例題 3(p.68), 加藤 線形代数 練習 4(p.69)

加藤 線形代数 系 3-1(p.67)

## 系 2 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度)

$A$ を $m \times n$ 行列とする.
$m = \operatorname{rank} A$ ならば
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持ち, 解の自由度は $n - m$.

「フルランクのとき, 変数の個数 $n-$ 方程式の数 $m$ で決まる」

# 定理と同類の名前

主張の格は, 高いほうから

| | |
|---|---|
| ○○定理 | ○○ Theorem 特に重要な定理 |
| 定理 | Theorem 重要で著者が特に主張したい命題 |
| 命題, 主張 | Proposition, Assertion 定理ほどは重要じゃない命題 |
| 事実 | Fact 命題と同じだけど, 証明が難しすぎて主張だけいうときによく使われる? |
| 系 | Corollary 重要かもしれないけど定理から簡単に導ける命題 |
| 補題, 補助定理 | Lemma 定理を証明するために, あらかじめ証明する (技術的な) 命題 |

数学書のありがちなスタイル. 定義-定理 (や同類のやつ)-証明, 定義-定理 (や同類のやつ)-証明

# ここまで来たよ

15 第 2 章 連立 1 次方程式 (行列の行基本変形, 連立 1 次方程式)

16 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式)
- ◆解の存在|3. 連立 1 次方程式とその解
- ◆同次連立 1 次方程式|3. 連立 1 次方程式とその解

# ◆同次連立 1 次方程式

## 定義 3 (同次連立 1 次方程式)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が

1. 同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
2. 非同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

同次=斉次=homogeneous(等質)=次数が同じ (今の場合, 各項が 1 次)

## 命題 4

同次方程式はつねに自明 (trivial) な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を持つ

証明: 同次連立 1 次方程式では $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.

## 定義 5 (非自明な解)

同次方程式の $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を非自明 (non-trivial) な解という

英単語自明はいろんな文脈でも登場.「わかりきった」?

加藤 線形代数 定理 3-3(p.69)

## 定理 6 (同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在)

$A$ を $m \times n$ 行列とする.
同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (**) は

1. $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow$ (**) は自明な解しか持たない
2. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ (**) は非自明な解を持つ

- $\mathbf{0}$ は自明な解.
  - 同次連立 1 次方程式の解空間の直線や平面は原点を通る.
- 自明な解しか持たないなら, 解は一意に定まる.
  - 解空間が 1 点の場合のこと.
- 非自明な解が存在するなら, 無限個の解が存在する.
  - 解空間が直線や平面のときが, 非自明な解があるとき.

加藤 線形代数 例題 4(p.70), 例題 5(p.70), 章末問題 3(p.72)

# 第 3 章 行列の構造 (基本行列と基本変形)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L17(2022-06-08 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-08 Wed 11:01 JST hig"

今日の目標

- 行/列基本操作と, 基本行列を左右からかけることとの対応を説明できる



# ここまで来たよ

15 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式)

16 第 3 章 行列の構造 (基本行列と基本変形)
- ◆基本行列|1. 基本行列と基本変形
- ◆列基本変形|1. 基本行列と基本変形

# ◆基本行列 加藤 線形代数 p.75

$P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ はいずれも, 単位行列をちょっと変更した $m$ 次正方行列.
$P_{ij}, P_i$ の $ij$ は基本行列の番号. $a_{k\ell}$ の $k\ell$ は行番号列番号.

## $P_{ij}$

例: 3 次の $P_{12} = P_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_{ij} = [a_{k\ell}]$ とすると,

$$a_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 - \delta_{ik} - \delta_{j\ell}) + \delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}.$$

## $P_i(c)$

例: 3 次の $P_2(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_i(c) = [b_{k\ell}]$ とすると,

$$b_{k\ell} = \delta_{k\ell} + (c-1)\delta_{ik}\delta_{i\ell}$$

## $P_{ij}(a)$

例: 3 次の $P_{23}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{31}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$P_{ij}(a) = [c_{k\ell}]$ とすると,

$$b_{k\ell} = \delta_{k\ell} + a\delta_{ik}\delta_{j\ell}$$

# 行基本操作 (復習) 加藤 線形代数 p.48 線形代数☆演習 I(2022)L15

## 行列の行基本操作 (elementary row operations)

$[i], [j]$ は行列の行番号 ( 加藤 線形代数 では○の中に $i, j$)

(R1) $[i] \leftrightarrow [j]$, $i \neq j$
(R2) $[i] \times$ (定数$c$), $c \neq 0$
(R3) $[j] \times$ (定数$a$) $+ [i]$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column
これらは可逆
行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

# ◆基本行列と行基本変形 加藤 線形代数 p.76

行基本操作 $\leftrightarrow$ 基本行列の左からの積

$m \times n$ 行列 $A$ に対して, 行基本操作は $m$ 次の基本行列を左からかけるのと同じ

(R1) $P_{ij}$ を左からかける
(R2) $P_i(c)$ を左からかける
(R3) $P_{ij}(a)$ を左からかける $[j] \times (a) + [i]$.

加藤 線形代数 練習 2(p.77) mobius K3.1.10

行基本変形 基本行列の積を左からかけるのと同じ
「まず (R1), つぎに (R3)」は $P_{23}(a)(P_{12}A)$ なので, 行列の積
$Q = P_{23}(5)P_{12}$.

加藤 線形代数 例 1, 練習 3(p.77) mobius K3.1.30

例

$$P_{12}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} = \qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$P_3(5)F = [g_{kp}]$ とする.

$$g_{kp} = \sum_{\ell} b_{k\ell} f_{\ell p} = (\delta_{k\ell} + (5-1)\delta_{3k}\delta_{3\ell}) f_{\ell p} =$$

例

$$P_{23}(5)\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

L17-Q1

## Quiz(基本行列)

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ を考える.

1. $A$ を行基本変形で簡約階段形にしよう.
2. 上で求めた行基本変形に現れた基本操作それぞれに対応する基本行列 $Q_1, Q_2, \ldots$ を書こう.
3. 上で求めた基本行列の積 $Q$ を求めよう.
4. $QA$ が簡約階段形であることを確かめよう.

加藤 線形代数 定理 1-1(p.77) これは行基本変形定理 加藤 線形代数 定理 2-1(p.53) の言い換え

## 定理 1 (行基本変形定理 (その 2))

任意の $m \times n$ 行列 $A$ に対して, $B = Q_1 Q_2 \cdots Q_s A$ が簡約階段形の行列となるような $m$ 次の基本行列 $Q_1, \ldots, Q_s$ が存在する.

証明 最初の基本操作に対応する行列が $Q_s$, ..., 最後の基本操作に対応する行列が $Q_1$.

# ここまで来たよ

15 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式)

16 第 3 章 行列の構造 (基本行列と基本変形)

- ◆基本行列|1. 基本行列と基本変形
- ◆列基本変形|1. 基本行列と基本変形

# ◆列基本変形 加藤 線形代数 p.78

## 行列の列基本操作 (elementary column operations)

$[i$列$], [j$列$]$ は行列の列番号 ( 加藤 線形代数 では□の中に $i, j$)

(C1) $[i$列$] \leftrightarrow [j$列$]$, $i \neq j$
(C2) $[i$列$] \times ($定数$c)$, $c \neq 0$
(C3) $[j$列$] \times ($定数$a) + [i$列$]$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column
これらは可逆
列基本変形 列基本操作を繰り返して行列を変形すること

加藤 線形代数 練習 4(p.78)

# ◆基本行列と列基本変形

加藤 線形代数 p.79

## 列基本操作 $\leftrightarrow$ 基本行列の右からの積

$m \times n$ 行列 $A$ に対して, 列基本操作は $n$ 次の基本行列を右からかけるのと同じ

(C1) $P_{ij}$ を右からかける
(C2) $P_i(c)$ を右からかける
(C3) $P_{ji}(a)$ を右からかける $[j$列$] \times$ (定数$a$) $+ [i$列$]$

例

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} P_{12}(2) =$$

加藤 線形代数 練習 5(p.80) mobius K3.1.50

列基本変形 基本行列の積を右からかけるのと同じ

「まず (C1), つぎに (C3)」は $(AP_{12})P_{23}(5)$ は, 行列の積 $P = P_{12}P_{23}(5)$.

加藤 線形代数 練習 6(p.80)

# ◆行列の標準形

加藤 線形代数 定理 1-2(p.81) と同じことをちょっと違った日本語で言ってみる

## 定理 2 (行列の標準形)

任意の $m \times n$ 行列 $A$ に対して,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$

(「最初の $r = \operatorname{rank} A$ 個の対角成分のみ 1, 他はぜんぶ 0」) の形の $m \times n$ 行列 $B$ が一意的に存在して, 適当な

- $m$ 次の基本行列の積 $Q$
- $n$ 次の基本行列の積 $P$

で, $QAP = B$ とできる

一意性の証明 $A$ の階数だけで決まるから.

## 定義 3 (行列の標準形)

上の $B$ を, $A$ の標準形という.

一意だから, そう定義してよい.

存在の証明「行基本変形, 列基本変形で $B$ に到達する」アルゴリズムを与える. 加藤 線形代数 p.81. このアルゴリズムは手計算でも使う.

- $A$ をまず行基本変形で簡約階段形にする.
  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 主列以外の列 $[i列]$ の非零成分 $a$ は, 主列 $j$ で, $[j列] \times (-a) + [i列]$ で $0$ にできる.
- 主列以外の列 $[i列]$ が $\mathbf{0}$ のとき, 主列 $j$ と $[j列] \leftrightarrow [i列]$ で交換して右側に持っていく.

加藤 線形代数 例題 1(p.83), 練習 7(p.83), 章末問題 (p.94)

# 第 3 章 行列の構造 (正則行列)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L18(2022-06-10 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-10 Fri 07:30 JST hig"

今日の目標

- 正則行列の判定条件を説明できる
- 正則行列の判定条件を適用できる

# L17-Q1
## Quiz 解答: 基本行列

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{\text{R1 } [1]\leftrightarrow[3]}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{R2 } [2]\times\frac{1}{3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{R3 } [2]\times 2+[1]}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
2. $A$ が $3 \times 2$ 行列なので, 3 次の基本行列を使う.
   [$Q_i$ の変数名は自由. 各行列と, 次の問の $Q$ が正しければよい.]
   - R1 $[1] \leftrightarrow [3]$ $\quad Q_1 = P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   - R2 $[2] \times \frac{1}{3}$ $\quad Q_2 = P_2(\frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   - R3 $[2] \times 2 + [1]$ $\quad Q_3 = P_{12}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. $Q = Q_3Q_2Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
4. $QA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

# ここまで来たよ

17 第 2 章 連立 1 次方程式 (連立 1 次方程式)

18 第 3 章 行列の構造 (正則行列)
- ◆解の存在|3. 連立 1 次方程式とその解

# 正則行列 (復習)

加藤 線形代数 p.32 | 線形代数☆演習 I(2022)L10

## 定義 1 (正則行列と逆行列)

$n$ 次正方行列 $A$ に対して, $XA = AX = E$ となる $n$ 次行列が存在するとき, $A$ を正則行列 (non-singular matrix) といい, $X$ は $A$ の逆行列 (inverse matrix) であるという.

$n = 2$ は $\Delta \neq 0$ のとき正則で $A^{-1}$ の公式あり.

## 定理 2 (正則行列の性質)

積 $A, B$ が正則行列 ならば, $AB$ も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
逆 $A$ が正則行列 ならば, $A^{-1}$ も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.
転置 $A$ が正則行列 ならば, ${}^tA$ も正則行列で, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

# ◆基本行列の正則性 加藤 線形代数 p.84

加藤 線形代数 定理 2-1(p.84)

## 定理 3 (基本行列の正則性)

- $n$ 次の基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n.\ i \neq j, c \neq 0)$ はすべて正則行列.
- 逆行列は次の通り.
  - $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.
  - $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$.
  - $P_{ij}(a)^{-1} = P_{ij}(-a)$.

‘基本行列の逆行列はまた基本行列’

# 基本行列の正則性の証明 加藤 線形代数 p.84

下心 基本操作は可逆だから, 逆操作の行列が逆行列になってるはず.

加藤 線形代数 練習 1(p.85)

証明 (構成的 1)

L18-Q1

## 証明 (構成的 1')

$P_i(c) = [b_{k\ell}]$ としたとき, $b_{k\ell} = \delta_{k\ell}(1 + (c-1)\delta_{ik})$ であることを利用して, $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$ であることを示そう.

加藤 線形代数 定理 1-1(p.77) 定理 1-2(p.81) の系

## 系 4

任意の $m \times n$ 行列 $A$ について,

- $QA$ が簡約階段行列となる $m$ 次正則行列 $Q$ が存在する.
- $QAP$ が標準形となる $n$ 次正則行列 $P$ が存在する.

一意ではない

証明 定理の証明で, $Q = Q_s \cdots Q_1$, $P = P_t \cdots P_1$ とすると, $Q, P$ は正則行列の積なので, やはり正則行列.

# ◆正則行列の構造

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)

## 定理 5 (正則行列の構造)

$n$ 次正方行列について次の 4 つの条件は同値

(a) $A$ は正則行列
(b) $\mathrm{rank}\ A = n$　　'フルランク', 簡約階段形が単位行列
(c) $A$ は有限個の基本行列の積で書ける
(d) 待て 加藤 線形代数 4 章

$n = 2$ のときの話とあってる?

証明

補助定理 加藤 線形代数 例題 1, 練習 2, 練習 3(p.86) を準備した上で,

(a)⇒(b)⇒(c)⇒(a) を示す.

(a)⇒(b) 部分は, 対偶 (contraposition)「((b) でない)⇒((a) でない)」を示すことによる.

# 補助定理

$n$ 次正方行列 $A$ について 加藤 線形代数 p.88

1. 加藤 線形代数 例題 1 $n$ 行目が ${}^t\mathbf{0}$ なら $A$ は正則でない
2. $n$ 列目が $\mathbf{0}$ なら $A$ は正則でない
3. 加藤 線形代数 練習 2 $i$ 行目が ${}^t\mathbf{0}$ なら $A$ は正則でない
4. 加藤 線形代数 練習 2 $j$ 列目が $\mathbf{0}$ なら $A$ は正則でない
5. 加藤 線形代数 練習 3 $i$ 行目と $j$ 行目 $(i \neq j)$ が一致するなら $A$ は正則でない
6. 加藤 線形代数 練習 3 $i$ 列目と $j$ 列目 $(i \neq j)$ が一致するなら $A$ は正則でない
7. $i$ 行目が, $j$ 行目 $(i \neq j)$ の $c$ 倍なら $A$ は正則でない
8. $i$ 列目が, $j$ 列目 $(i \neq j)$ の $c$ 倍なら $A$ は正則でない
9. $j$ 行目の $a$ 倍を, $i$ 行目に加えたものが, $k$ 行目 $(k \neq i)$ に等しいなら $A$ は正則でない
10. $j$ 列目の $a$ 倍を, $i$ 列目に加えたものが, $k$ 列目 $(k \neq i)$ に等しいなら $A$ は正則でない

# 補助定理の証明の例

(一般に $n$ 次の正則行列 $A, B$: 正則, $S, T$: 非正則とすると, $AB$ は正則, $AS, SA, ST$ は非正則)

## 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 ¬ (b) ⇒ ¬ (a)

$\operatorname{rank} A \neq n$ すなわち $\operatorname{rank} A < n$ とする.
正則な $P$ で簡約階段形 $PA$ にする. $PA$ の $n$ 行目は ${}^t\mathbf{0}$. 加藤 線形代数 例題 1 より $PA$ は正則でない.
(背理法) $A$ が正則なら, 積 $PA$ も正則なので矛盾する.
$A$ は正則でない.

## 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (b)⇒ (c)

$\operatorname{rank} A = n$ なので, ある正則な $P = Q_s \cdots Q_1$ で簡約階段化したとき,
$PA = E$.
$A = P^{-1} = (Q_s \cdots Q_1)^{-1} = Q_1^{-1} \cdots (Q_s)^{-1}$
これらはすべて基本行列 加藤 線形代数 定理 2-1(p.84).

# 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) の証明 (c)⇒ (a)

基本行列は正則行列
正則行列の積はまた正則行列.

# 第 3 章 行列の構造 (逆行列)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L19(2022-06-15 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-14 Tue 19:54 JST hig"

今日の目標

- 行基本変形を用いて逆行列を求められる

L18-Q1

## Quiz 解答: 基本行列の逆行列

$P_i(c^{-1}) = [d_{\ell p}], P_i(c)P_i(c^{-1}) = [f_{kp}]$ とする. $f_{kp} = \delta_{kp}$ を言えば, $P_i(c)P_i(c^{-1}) = E$, すなわち, $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$ を言ったことになる.

$$
\begin{aligned}
f_{kp} &= \sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell} \cdot d_{\ell p} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \delta_{k\ell}(1 + (c-1)\delta_{ik}) \cdot \delta_{\ell p}(1 + (c-1)\delta_{i\ell}) \\
&= \qquad (1 + (c-1)\delta_{ik}) \cdot \delta_{kp}(1 + (c^{-1}-1)\delta_{ik}) \\
&= \delta_{kp}(1 + (c-1)\delta_{ik} + (c^{-1}-1)\delta_{ik} + (c-1)(c^{-1}-1)\delta_{ik}\delta_{ik}) \\
&= \delta_{kp}(1+0).
\end{aligned}
$$

最後の等号では, $\delta_{ik}\delta_{ik} = \delta_{ik}$ を使った ($i = k$ かどうかに応じて, $1^2 = 1$ または $0^2 = 0$).

# ここまで来たよ

18 第 3 章 行列の構造 (正則行列)

19 第 3 章 行列の構造 (逆行列)
- ◆逆行列と基本変形
- ◆逆行列の求め方

# ◆逆行列と基本変形 加藤 線形代数 p,.88

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) より

任意の $n$ 次正則行列 $A$ は, $n$ 次基本行列のある積として次のように書ける…「$E$ に $Q_s, \ldots, Q_1$ の順に基本操作を適用すると $A$」

$$A = Q_1 \cdots Q_s E. \qquad (*)$$

これは次のようにも書ける.

$$Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} A = E. \qquad (**)$$

両辺の逆行列をとって次のように書ける…「$E$ に $Q_1^{-1}, \ldots, Q_s^{-1}$ の順に基本操作 (逆操作) を適用すると $A^{-1}$」

$$A^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} E. \qquad (***)$$

$Q = Q_1 \cdots Q_s, Q^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$.

$$E \xrightarrow{Q} A \quad (*)$$
$$\updownarrow \text{逆変形}$$
$$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$$

$$A \xrightarrow{Q^{-1}} E \quad (**)$$
$$\updownarrow \text{同じ行基本変形}$$
$$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$$

## 逆行列の求め方 加藤 線形代数 p.89

任意の正則行列 $A$ について,
$A$ に施して $E$ を作る (簡約階段形にする) 行基本変形を
$E$ に施すと, $A^{-1}$ ができる.

https://bit.ly/rrmatrix



# ここまで来たよ

18 第 3 章 行列の構造 (正則行列)

19 第 3 章 行列の構造 (逆行列)
- ◆逆行列と基本変形
- ◆逆行列の求め方

# ◆逆行列の求め方 加藤 線形代数 p.89

## 逆行列を求める筆算

$n$ 次の正方行列 $A$ が与えられたとき, $n \times (2n)$ 行列 $[A|E]$ を考え, 掃き出し法で (行基本変形で) 簡約階段形にする.

$$[A|E] \to \cdots \to [E|B]$$

となったなら, $A$ は正則で, $B = A^{-1}$ が求める逆行列.

加藤 線形代数 例題 1(p.92)

## 「正則であるかどうか調べ, 正則であればその逆行列を求めよ」

「逆行列の求めた方」で, $[A|E]$ を簡約階段形に変形する. $[E|B]$ に到達したなら逆行列が得られる. $[E|B]$ に到達しないなら (階数が不足するなら), 正則でない. 副産物として $\operatorname{rank} A(< n)$ が求まる.

`https://bit.ly/rrmatrix`

mobius K3.3.10 加藤 線形代数 練習 3(p.92), 章末問題 4(p.94)

# 掃き出し法の復習

線形代数☆演習 I(2022)LL15 | 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分を R2 ($[1] \times 1/c$) で 1 にする
(4) R3 $[j] \times a + [i]$ で, ブロックの $i(\geq)2$ 行目を零にする
(10) R3 $[1] \times a + [i]$ で, ブロックのその列の上側を零にする
(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う
(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

加藤 線形代数 例題 1(p.57), 練習 7(p.58), 章末問題 1,5,6(pp.72,73) mobius K2.2.50

# 第 4 章 行列式 (置換)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L20(2022-06-17 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-17 Sun 06:51 JST hig"

今日の目標

- 置換を説明できる
- 置換の符号を, 差積, 転倒数の計算から求められる

# ここまで来たよ

19 第 3 章 行列の構造 (逆行列)

20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

# 写像と変換の復習

加藤 線形代数 pp.6,8,10,12,191–

# ◆置換

## 定義 (置換)

有限集合 $\{1, \ldots, n\}$ 上の変換 加藤 線形代数 p.6 で, 1 対 1 加藤 線形代数 p.16, 上への写像 加藤 線形代数 p.15 になっているものを置換 (permutation) という.

加藤 線形代数 例 1(p.98) $X = \{1, \ldots, 5\}$ の置換 $\sigma : X \to X$.

$$\sigma(x) = \begin{cases} 3 & (x = 1) \\ 5 & (x = 2) \\ 2 & (x = 3) \\ 4 & (x = 4) \\ 1 & (x = 5) \end{cases}$$

別の書き方 $\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 5 \mapsto 1$.
この $\sigma$ に対して $\sigma(2) = 5$.

## 置換の略記方法 (角括弧は行列, 丸括弧は置換)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{pmatrix}.$$

- これらの数は,「番目」でなく, その数 $\in X$ を表す.
  $X = \{A, B, C, D, E\}$ でも同じことができる.
- 1 対 1 の変換であることから, 下の行には同じ数がちょうど 1 回ずつでてくる.
- 置換を 1 個決めるごとに, 下の行に順列 (例)35241 がでてくる, という気分の記号.
- 置換は, $n$ 個から $n$ 個を取り出す順列の個数 ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.
- グレッグ イーガン, 順列都市 Permutation city, 早川書房, 1999.

# ここまで来たよ

19 第 3 章 行列の構造 (逆行列)

20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

# ◆置換の合成

$\sigma, \tau$: 置換.
合成変換 $\tau(\sigma(x)) = (\tau \circ \sigma)(x)$ のことを, 置換の合成 $\tau\sigma$ と書く.
「積」のように見えるが, $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

加藤 線形代数 例題 1(p.100), 練習 2(p.100)

# ◆単位置換と逆置換|1. 置換

## 定義

恒等変換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を単位置換という.

任意の置換 $\sigma$ に対して $\sigma e = e\sigma = \sigma$.

## 定義

$\sigma$ の逆変換 $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を $\sigma$ の逆置換という.

$(\tau\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\tau^{-1}$. (合成変換の逆変換の性質の反映) mobius K4.1.10

なんか行列の積に似てる…

「$X$ の置換全体は $X$ の対称群 (symmetric group) $S_n$ という群 (group) をなす. $n$ 次正則行列全体は群 GL($n$) をなす」 代数入門 (3 年)

略記 $\underbrace{\sigma \cdots \sigma}_{k} = \sigma^k. \ (k \geq 0), \quad \underbrace{\sigma^{-1} \cdots \sigma^{-1}}_{k} = \sigma^{-k}. \ (k \geq 0).$

# ここまで来たよ

19 第 3 章 行列の構造 (逆行列)

20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

# ◆置換の符号

加藤 線形代数 p.102

## 定義 (差積)

$n$ 変数 $(x_1, \ldots, x_n)$ の差積とは, 多項式

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

$n \times n$ 個のペア $(i, j)$ のうち, $n(n-1)/2$ 個の積.

加藤 線形代数 例 4(p.103)

## 定義 (総積の記号)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

$\Sigma$ for Sum, $\Pi$($\pi$ の大文字) for Product.

加藤 線形代数 定義 1-1(p.105)

## 定義 (置換の符号)

$\{1, \ldots, n\}$ の置換 $\sigma$ について

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \frac{D(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})}{D(x_1, \cdots, x_n)} = \pm 1$$

を $\sigma$ の符号 (signature) という.

ここで定義した符号とは, 整数 $\pm 1$ のことで, '正' ,'負' という語ではない.

加藤 線形代数 p.105

## 定義 (偶置換奇置換)

- 符号が $+1$ の置換を偶置換,
- 符号が $-1$ の置換を奇置換という.

# 置換の符号の性質

加藤 線形代数 定理 1-1(p.104), 系 1-1(p.105)

## 定理 (置換の符号の合成公式)

置換 $\sigma, \tau$, 単位置換 $e$ に対して,

- $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}\sigma \times \operatorname{sgn}\tau$
- $\operatorname{sgn}\ e = 1.$
- $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}\sigma.$

「sgn は置換の群から乗法群 $\{\pm 1\}$ への群準同形写像」

代数入門

# 置換の符号の別の特徴づけ

加藤 線形代数 例題 3(p.104)

## 定義

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 $\sigma$ に対して,
$X$ の要素の $n(n-1)/2$ 個のペア $(i, j)$ $(i < j)$ のうち, $\sigma(i) > \sigma(j)$ であるものの個数を,
$\sigma$ の転倒数 という.

## 命題

$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{\sigma \text{ の転倒数}}$.

加藤 線形代数 練習 5(p.104)

mobius K4.1.20, K4.1.30

# ここまで来たよ

19 第 3 章 行列の構造 (逆行列)

20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

# ◆偶置換と奇置換|1. 置換

加藤 線形代数 定理 1-2(p.106)

## 定理

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換を考える $(n \geq 2)$.

- 置換全体は ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.
- 偶置換は $n!/2$ 個ある.
- 奇置換は $n!/2$ 個ある.

証明 $\tau$: 奇置換を固定する.
置換全体の集合 $S_n$ の上の変換 $\sigma \mapsto \tau\sigma$ を考える.

# ここまで来たよ

19 第 3 章 行列の構造 (逆行列)

20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

# 巡回置換と互換

## 定義 (巡回置換)

$1 \leq k \leq n$ とする. 次の形の置換を巡回置換 (cyclic permutation) という.

$$\begin{aligned}
\sigma(x_{i_1}) &= x_{i_2} \\
\sigma(x_{i_2}) &= x_{i_3} \\
&\vdots \\
\sigma(x_{i_{k-1}}) &= x_{i_k} \\
\sigma(x_{i_k}) &= x_{i_1} \\
\sigma(x) &= x \quad (\text{他の } x \text{ つまり} x \neq x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})
\end{aligned}$$

例 $n = 5, k = 3$ で $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

略記 上の巡回置換を $(4\ 1\ 5) = (1\ 5\ 4) = (5\ 4\ 1)$ と略記する.

## 定義 (互換)

長さ 2 の巡回置換 $(x_1\ x_2)$ を 互換 (transposition) という.

$$\begin{aligned}\sigma(x_{i_1}) =& x_{i_2}\\ \sigma(x_{i_2}) =& x_{i_1}\end{aligned}\qquad \sigma(x) = x \quad (x \neq x_{i_1}, x_{i_2})$$

加藤 線形代数 例 5(p.105)

## 事実

互換は奇置換

例 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix} = (2\ 5)$

# 置換の符号の別の特徴づけ

加藤 線形代数 なし

## 定理

置換 $\sigma$ が,
$k$ 個の互換 $\tau_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ の積 $\sigma = \tau_k \ldots \tau_1$ として書けるとき,

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^k$$

業界用語: 特徴づけ=characterization, defining property. 定義と同値で, こちらを定義にしてもよいような性質のこと.

こちらを定義にする場合, 先に well-definedness を確かめる必要がある

- すべての置換は, 互換の合成として書ける
- 互換の個数の偶奇は, 互換の合成の表し方によって変わらない

前半部分 (書けること)

**事実**

すべての置換は巡回置換の合成で書ける. 加藤 線形代数 章末問題 1(p.133)

**事実**

長さ $k$ の巡回置換は, $k-1$ 個の互換の合成で書ける.

加藤 線形代数 例 6, 練習 6(p.106)

よって, 巡回置換は, 長さ $k$ が偶数なら奇置換, 奇数なら偶置換.

**事実**

すべての置換は互換の合成で書ける. 加藤 線形代数 章末問題 2(p.133)

# 第 4 章 行列式 (行列式)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L21(2022-06-22 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-22 Wed 14:17 JST hig"

今日の目標

- 行列式の定義を説明できる
- 定義に従って, 2,3 次の行列式を計算できる
- 行列式の交代性を説明できる
- 2 次の行列式と平行四辺形の面積の関係を説明できる

# ここまで来たよ


20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

21 第 4 章 行列式 (行列式)
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式
- 面積・拡大率としての行列式

# 置換の符号の性質

加藤 線形代数 定理 1-1(p.104), 系 1-1(p.105)

## 定理 1 (置換の符号の合成公式)

置換 $\sigma, \tau$, 単位置換 $e$ に対して,

- $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}\sigma \times \operatorname{sgn}\tau$ (*)
- $\operatorname{sgn}\ e = 1.$
- $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}\sigma.$

「sgn は置換の群から乗法群 $\{\pm 1\}$ への群準同形写像」 代数入門

(*) の証明

$$D(x_{\tau(1)}, \ldots) = \operatorname{sgn}\tau \times D(x_1, \ldots)$$

の分子分母にはそれぞれ $x_1, \ldots, x_n$ が現れている. 約分すると消えるのだから, どんな文字でもいい. $x_1, \ldots, x_n$ を, $y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}$ に置き換える. sgn の定義より,

$$\text{右辺} = \operatorname{sgn}(\tau) \times D(y_{\sigma(1)}, \ldots) = \operatorname{sgn}(\tau) \times \operatorname{sgn}(\sigma) D(y_1, \ldots)$$

$$\text{左辺} = D(y_{\sigma(\tau(1))}, \ldots) = \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \times D(y_1, \ldots)$$

# ◆偶置換と奇置換|1. 置換

加藤 線形代数 定理 1-2(p.106)

## 定理 2

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換を考える $(n \geq 2)$.

- 置換全体は ${}_n\mathrm{P}_n = n!$ 個ある.
- 偶置換は $n!/2$ 個ある.
- 奇置換は $n!/2$ 個ある.

証明 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots \end{pmatrix}$ を固定する. $\tau^{-1} = \tau$. $\operatorname{sgn}\tau = -1$.
$X$ の置換全体の集合 $S_n$ の上の変換 $\sigma \mapsto \tau\sigma$ を考えると, これは 1 対 1.

# ここまで来たよ


20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

21 第 4 章 行列式 (行列式)
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式
- 面積・拡大率としての行列式

# 巡回置換と互換

## 定義 3 (巡回置換)

$1 \leq k \leq n$ とする. 次の形の置換を巡回置換 (cyclic permutation) という.

$$\begin{aligned}
\sigma(i_1) &= i_2, \\
\sigma(i_2) &= i_3, \\
&\vdots \\
\sigma(i_{k-1}) &= i_k \\
\sigma(i_k) &= i_1, \\
\sigma(i) &= i \quad (\text{他の } i \text{ つまり} i \neq i_1, \ldots, i_k)
\end{aligned}$$

例 $n = 5, k = 3$ で $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

略記 上の巡回置換を $(4\ 1\ 5) = (1\ 5\ 4) = (5\ 4\ 1)$ と略記する.

## 定義 4 (互換)

長さ 2 の巡回置換 $(i_1\ i_2)$ $(i_1 \neq i_2)$ を 互換 (transposition) という.

$$\begin{aligned}\sigma(i_1) &= i_2,\\ \sigma(i_2) &= i_1,\\ \sigma(i) &= i \quad (i \neq i_1, i_2)\end{aligned}$$

加藤 線形代数 例 5(p.105)

## 事実 5

互換は奇置換

例 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix} = (2\ 5)$

# 置換の符号の別の特徴づけ

加藤 線形代数 なし

## 定理 6

置換 $\sigma$ が,
$k$ 個の互換 $\tau_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ の積 $\sigma = \tau_k \ldots \tau_1$ として書けるとき,

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^k$$

業界用語: 特徴づけ=characterization, defining property. 定義と同値で, こちらを定義にしてもよいような性質のこと.

こちらを定義にする場合, 先に well-definedness を確かめる必要がある

- すべての置換は, 互換の合成として書ける
- 互換の個数の偶奇は, 互換の合成の表し方によって変わらない

前半部分 (書けること)

**事実 7**

すべての置換は巡回置換の合成で書ける. 加藤 線形代数 章末問題 1(p.133)

**事実 8**

長さ $k$ の巡回置換は, $k-1$ 個の互換の合成で書ける.

加藤 線形代数 例 6, 練習 6(p.106)

よって, 巡回置換は, 長さ $k$ が偶数なら奇置換, 奇数なら偶置換.

**事実 9**

すべての置換は互換の合成で書ける. 加藤 線形代数 章末問題 2(p.133)

# ここまで来たよ

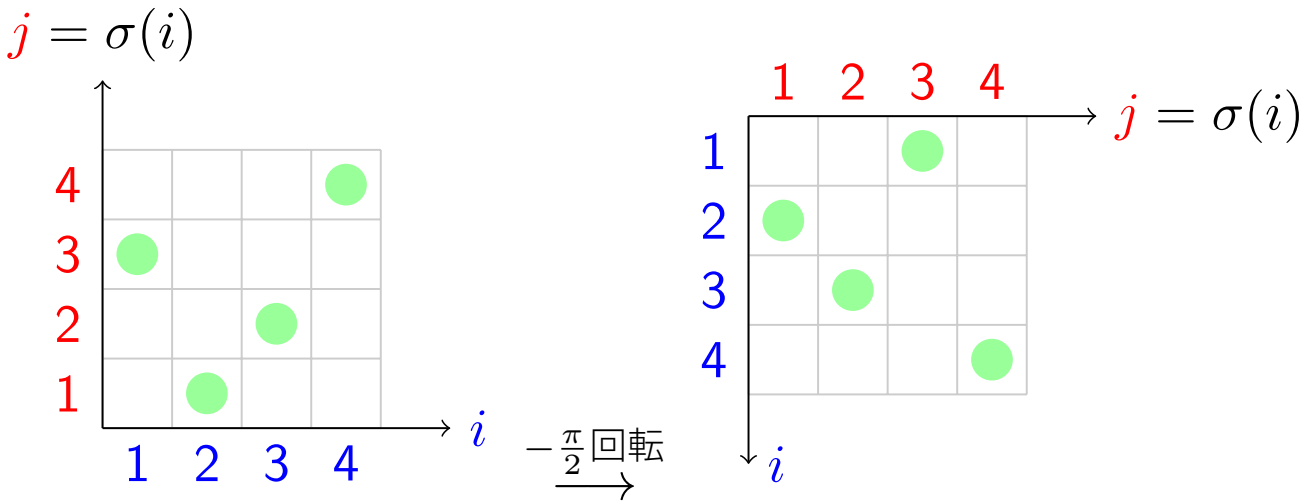
20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

21 第 4 章 行列式 (行列式)
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式
- 面積・拡大率としての行列式

# 互換のグラフ

$n = 4, X = \{1, 2, 3, 4\}$.
例として $X$ の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
左が $j = \sigma(i)$ の ‘グラフ’

- 変換であること: 各列に●が 1 個ある
- ‘1 対 1 かつ上への’ 変換であること: 各行に●が 1 個ある




あれっ 4 次の正方行列みたい…

$X = \{1, \ldots, n\}$ の置換 $\sigma$ は, $n$ 次の正方行列の, 特定パターンの $n$ 個の成分●$(i, \sigma(i))$ $(i = 1, \ldots, n)$ の選択を指定する.
問: $\sigma^{-1}$ のグラフは?

# ◆行列式の定義

加藤 線形代数 定義 2-1(p.107)

## 定義 10 (行列式)

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次正方行列に対して,

$$\det A = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\text{置換●})\,\text{●成分の積} = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

を $n$ の行列式 (determinant) という. $\sum$ は $n!$ 個の置換全ての和.

### 邪悪な記法

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

$|\ \ |$ は絶対値, $|\ \ |$ は行列式. $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right| = |-2| = 2.$

# 行列式の直接計算の例

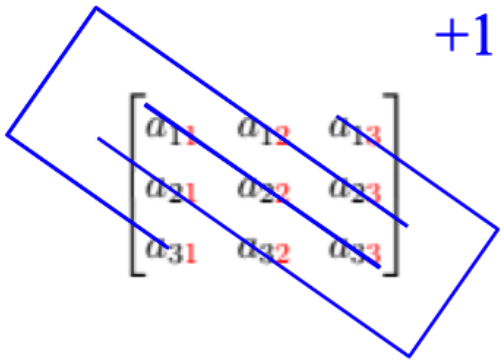
加藤 線形代数 例 1–4(pp.107-109)

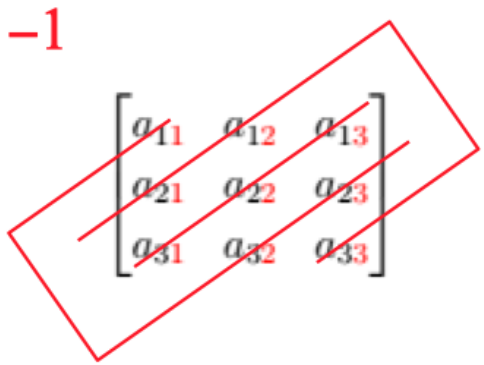
例 1 $n = 2$ 加藤 線形代数 練習 1(p.108), 章末問題 3(1)(p.133) 加藤 線形代数 p.34 $2! = 2$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \Delta$$

例 2 $n = 3$ 加藤 線形代数 練習 2(p.109), 章末問題 3(2)(p.133) $3! = 6$ 項

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$




サラスの公式

加藤 線形代数 図 2(p.108)

mobius K4.2.10

例 3 $n = 4$ $n = 4$ ではサラスの公式は正しくない. 正しくは $4! = 24$ 項の和だがサラスの公式を誤適用すると 8 項になってしまう. 定義をそのまま使うしかない.

例 4 対角行列, 単位行列. 和は $\sigma = \mathrm{id}$(恒等置換) のみ.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdots\cdots a_{nn}$$

特に $\det(E) = 1$.

# ここまで来たよ

20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

21 第 4 章 行列式 (行列式)
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式
- 面積・拡大率としての行列式

# ◆行列式の行多重線形性

加藤 線形代数 定理 2-1(p.110)

## 定理 11 (行多重線形性)

$A$: $n$ 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, ある行 $i$ に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

$f(x)$ の線形性 (linearity): $f(kx + \ell y) = kf(x) + \ell f(y)$ が成り立つこと.
多重線形性 (multi-linearity): $f(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \det {}^t[\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ のどの引数についても線形性を持つこと.
証明 $i = 1$ で一般性を失わない.

$$\begin{aligned} \text{左辺} =& \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(kb_{\sigma(1)} + \ell c_{\sigma(1)})a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ =& k \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &+ \ell \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) c_{\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \text{右辺}. \end{aligned}$$

# ◆行列式の交代性

加藤 線形代数 定理 2-2(p.111)

## 定理 12 (行列式の行交代性)

$A$: $n \times n$ 行列,
$\boldsymbol{a}_i = [\, a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}\,]$: $A$ の第 $i$ 行ベクトル

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = (-1) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

一般化 (特殊な場合 $\tau =$ 互換, として上を含む) 加藤 線形代数 定理 2-3(p.112)

## 定理 13 (行列式の行の置換のもとでの変換)

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

## 一般化のほうの証明

左辺の $\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$ を変形して, 右辺の形に持っていく.

あえて, $\sigma(i) = \sigma\tau^{-1}\tau(i)$ と書く.

$$\det B = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\tau(1)\sigma\tau^{-1}\tau(1)} \cdots a_{\tau(n)\sigma\tau^{-1}\tau(n)}$$

行番号 $\tau(i) = 1, 2, 3,$ で積の順をソート

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma\tau^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma\tau^{-1}(n)}$$

合成置換 $\rho = \sigma\tau^{-1}$ とおく. $\sigma$ の和を $\rho$ の和で置き換え

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho\tau) a_{1\rho} \cdots a_{n\rho}$$

定理 1-1 より

$$= \sum_\rho \operatorname{sgn}(\rho)\operatorname{sgn}(\tau) a_{1\rho} \cdots a_{n\rho} = \text{右辺}.$$

# ここまで来たよ


20 第 4 章 行列式 (置換)
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換
- 巡回置換と互換

21 第 4 章 行列式 (行列式)
- ◆行列式の定義|2. 行列式
- ◆多重線形性と交代性|2. 行列式
- 面積・拡大率としての行列式

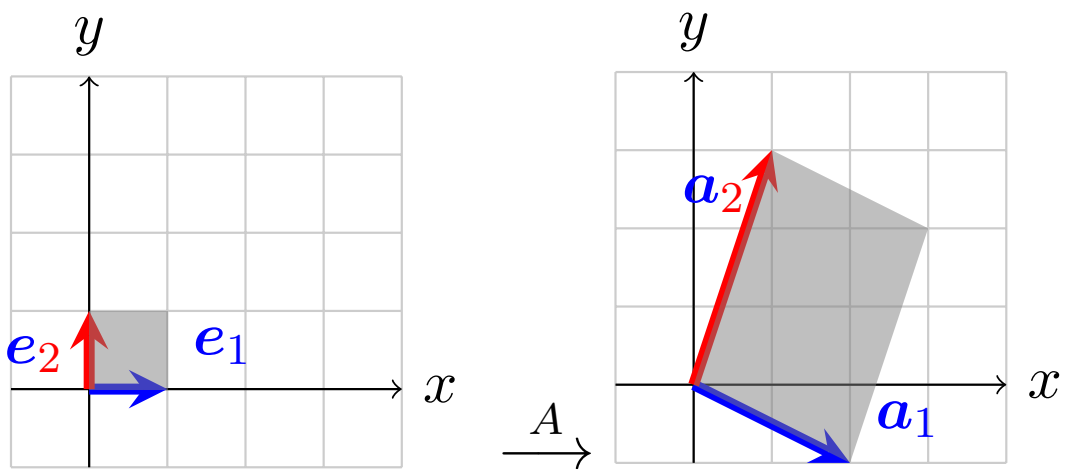
# 2 次の行列式と面積・拡大率

加藤 線形代数 なし 2 次正方行列 $A$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$A$ の表す線形変換 $f$ は, $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}'$ に写す. 例: $A = [\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\,] = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.
ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は, ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に写る.
$\mathbb{R}^2$ の図の正方形は, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形に写る.



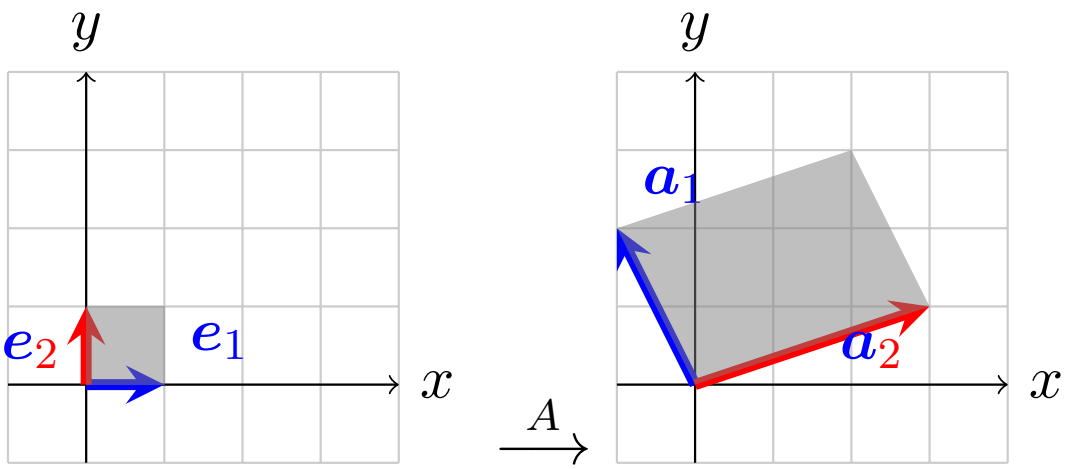
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積は?

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}_1| \times |\boldsymbol{a}_2| \sin\theta &= \sqrt{|\boldsymbol{a}_1|^2 \times |\boldsymbol{a}_2|^2 (1 - \cos^2\theta)} \\ &= \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})^2} \\ &= |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = |\det A| = 7.\end{aligned}$$

$f$ の拡大率は $\det A = 7$.

# 平行四辺形が裏返しになるとき

行入れ替え $\leftrightarrow$ $x', y'$ 軸入れ替え.
例: $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.




$f$ の拡大率は $\det A = -7$.
平行四辺形が裏返しに写っているとき ($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の時計回りの順番が逆になっているとき), $\det A < 0$.
平行四辺形の面積は $|\det A| = 7$.

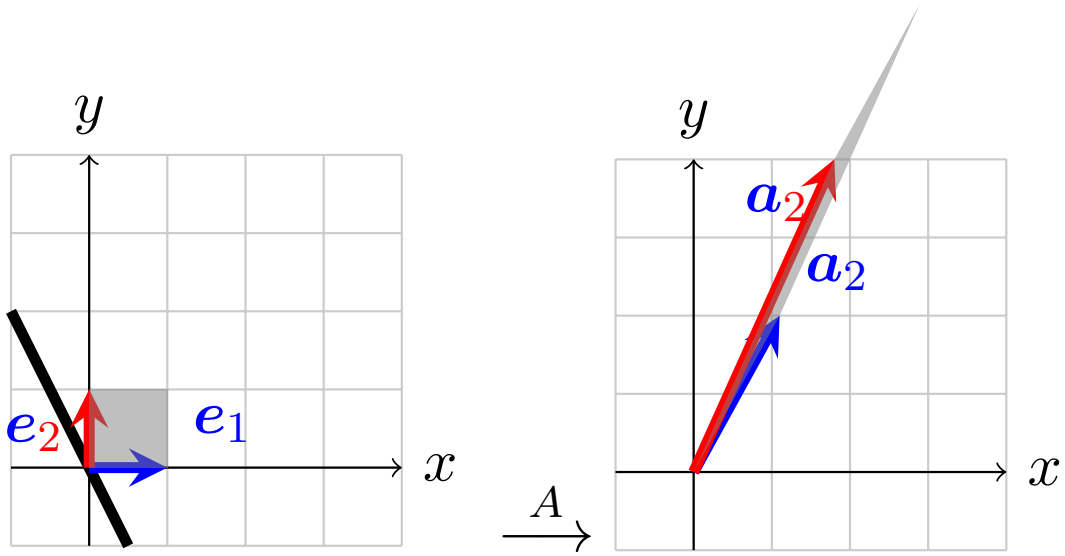
$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ は, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の符号付き面積

$\det A = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ は, $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ の符号つき面積拡大率

mobius K4.2.30

# 写すと平行四辺形がつぶれるとき

$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0.$




面積=拡大率=0.

# 第 4 章 行列式 (行列式 2)

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L22(2022-06-24 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-06-24 Fri 11:41 JST hig"

今日の目標

- 行列式の列多重線形性, 交代性, 図形的意味を説明できる
- 転置の行列式, 行列式の積公式を利用できる
- 行列式を, 定義と性質を使って計算できる

# ここまで来たよ

21 第 4 章 行列式 (行列式)

22 第 4 章 行列式 (行列式 2)
- ◆多重線線形性と交代性|2. 行列式
- 3 次の行列式と体積, 体積拡大率

# ◆多重線線形性と交代性 (前回の復習)

加藤 線形代数 定理 2-1(p.110)

## 定理 1 (行多重線形性)

$A$: $n$ 次正方行列, $\boldsymbol{a}_i$ 行ベクトル, ある行 $i$ に対して, $\boldsymbol{a}_i = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c}$.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ k\boldsymbol{b}+\ell\boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} = k \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} + \ell \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 定理 2-3(p.112)

## 定理 2 (行列式の行の置換のもとでの変換)

$\tau : \{1, \ldots, n\}$ の置換.

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{\tau(1)} \\ \boldsymbol{a}_{\tau(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{\tau(n)} \end{bmatrix} = \operatorname{sgn}(\tau) \times \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

# 行列式がゼロになる場合

加藤 線形代数 定理 2-1,2,3(pp.110-112)の系

## 系 3

$A$: $n$ 次の正方行列
$\boldsymbol{a}_i$: $i$ 行目の行ベクトル

- $(\exists i \text{ s.t.} \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}) \Rightarrow \det A = 0.$
- $(\exists i, j (i \neq j), c \in \mathbb{R} \text{ s.t.} \boldsymbol{a}_i = c\boldsymbol{a}_j) \Rightarrow \det A = 0.$

s.t.=such that
$\exists x$s.t.条件：条件を満たすような $x$ が存在する.

- 置換に関する和で書いた定義から
- $c = 0, 1$ はやさしい. 多重線形性で $c = 1$ に帰着.

# ここまでに知ったことを使った行列式の計算例

L22-Q1

## 基本行列の行列式

基本行列 加藤 線形代数 p.75 の行列式を求めよう.

1. $\det(P_{ij})$?
2. $\det(P_i(c))$?
3. $\det(P_{ij}(a))$?

加藤 線形代数 定理 3-2(p.121)

mobius K4.2.70, チーム課題, , mobius K4.2.90(未公開)

# ◆転置行列の行列式

加藤 線形代数 定理 2-4(p.113)

## 定理 4 (転置行列の行列式)

$\det({}^{\mathrm{t}}A) = \det(A).$

証明

$$\begin{aligned}
\det({}^{\mathrm{t}}A) &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\
&\overset{\text{積の並び替え}}{=} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&\overset{\tau=\sigma^{-1}\text{と定義}}{=} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau^{-1}) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&\overset{\text{逆置換の符号}}{=} \sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

# 列多重線形性と列交代性

加藤 線形代数 定理 2-5, 2-6(p.115)

## 定理 5

「列についても行と同様に多重線形性, 交代性 加藤 線形代数 定理 2-1,2,3 がなりたつ」

加藤 線形代数 練習 5(p.116)

## 定理 6

「列についても行と同様な $\det A = 0$ の十分条件 加藤 線形代数 系 2-1(p.112) がある」

行列式にとって, 行と列は同じ性質を持つ

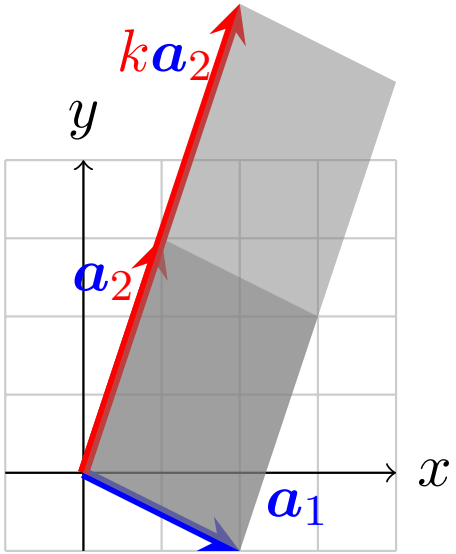
# 行列式の性質の図形的説明 加藤 線形代数 なし

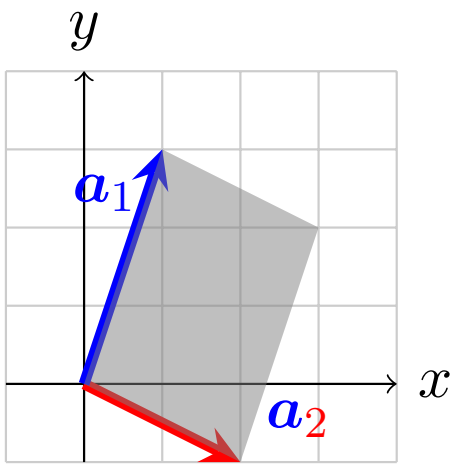
列多重線形性 $k\boldsymbol{a}_2$,
$k = 2$

列交代性 $\boldsymbol{a}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{a}_2$

$$\begin{aligned}&\det \begin{bmatrix} 2 & k\cdot 1 \\ -1 & k\cdot 3 \end{bmatrix} \\ =&k \times \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ =&k \times 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ =&(-1) \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ =&-7\end{aligned}$$




$\det(AB) = \det(A)\det(B)$
$\det(A)\det(B)$ : 正方形をまず $B$, 次に $A$ で写したときの, 累積した拡大率
$\det(AB)$ : 正方形を $AB$ でいちどに写したときの拡大率
もちろん等しい.

# ◆行列式の積公式

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) mobius K4.2.90(未公開)

## 定理 7 (行列式の積公式)

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

### 証明

ブロック分けでの積 加藤 線形代数 p.27

$$\det(AB) \overset{\text{ブロック分け}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{ブロックの計算}}{=} \det \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{1n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{1 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ a_{21}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{2n}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{2 行目の行多重線形性}}{=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{b}_1+\cdots a_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{3,\cdots,n \text{ 行目の行多重線形性}}{=\cdots=} \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{i_1} \\ \boldsymbol{b}_{i_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{i_n} \end{bmatrix}$$

(*) $n^n$ 個の和のうち, 行が重複して行列式が 0 にならない条件から, 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ に対応する $n!$ 個だけ残る.

$$\overset{(*)}{=} \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{\sigma(1)} \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{行交代性}}{=} \Big(\sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\operatorname{sgn}(\sigma)\Big)\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{定義}}{=} \det(A)\det(B).$$

加藤 線形代数 例 4(p.109)

## 補題 8

$\det(E) = 1.$

加藤 線形代数 系 2-2(p.118) 加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) の系

## 系 9 (逆行列の行列式)

$A$ が正則行列なら
$\det(A) \neq 0.$
$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

「det は, $n$ 次の正則行列全体から, 乗法群 $\mathbb{R}_{\neq 0}$ への群準同型写像である」

# ここまで来たよ

21 第 4 章 行列式 (行列式)

22 第 4 章 行列式 (行列式 2)
- ◆多重線線形性と交代性|2. 行列式
- 3 次の行列式と体積, 体積拡大率

# 復習

## 外積

線形代数☆演習 I(2022)L02

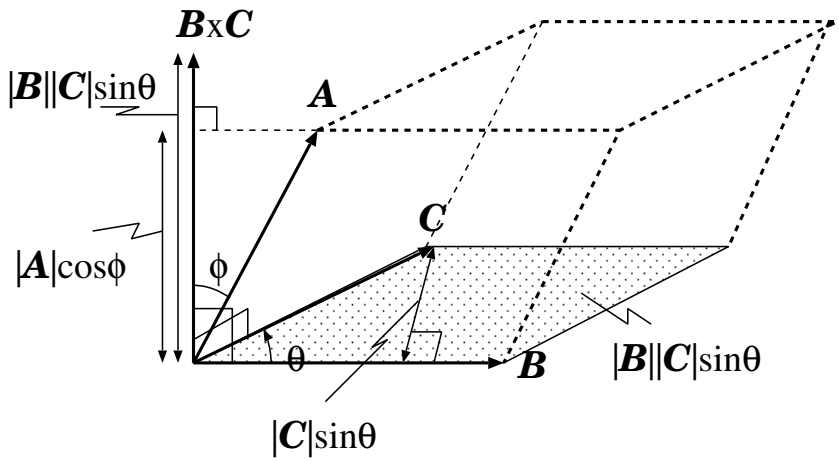
加藤 線形代数 p.265-266

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{matrix}\boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1\\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2\\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3\\ & a_1 & b_1\\ & a_2 & b_2\end{matrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$$

## スカラー 3 重積

線形代数☆演習 I(2022)L03

外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトル.
ということは, 内積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ はスカラー (1 個の実数) になる.
図形的に考えると, 絶対値 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ は, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ を 3 辺とする
平行六面体の体積.
右の図は $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}$ を描いている.



# 平行六面体の体積とスカラー 3 重積と行列式の図形的意味

加藤 線形代数 なし

3 次の行列式は, スカラー 3 重積, すなわち, 平行六面体の符号付き体積に等しい

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}=\det[\boldsymbol{abc}]$$

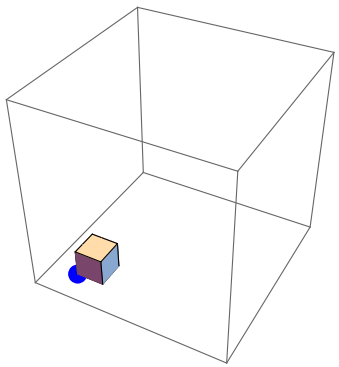
実は, $n$ 次正方行列の行列式 $\det[\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n]$ は
$\mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ を辺とする $n$ 次元の ‘平行 $2n$ 面体’ の符号付き体積.

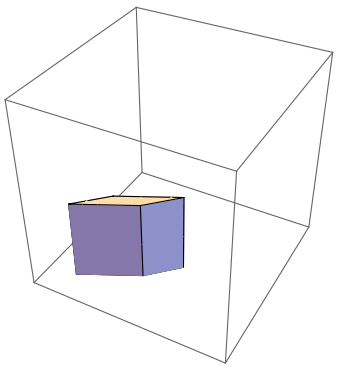
行列式は行列の「度量の」大きさのようなもの

# 3 次の行列式は体積拡大率と思える

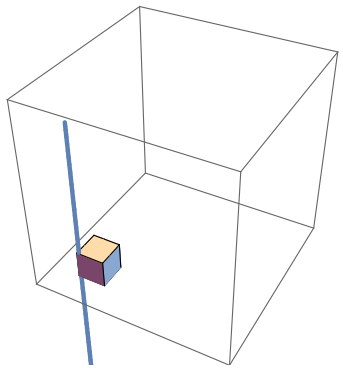
$A = [\boldsymbol{abc}]$ の表す 1 次変換で,
$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{a}$ に, $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{b}$ に, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{c}$ に写る.
$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ を 3 辺とする立方体は, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体,
またはそれをつぶした平面, 直線, 点に写る.
行列式 $\det A$ は 1 次変換の拡大率 (裏返しなら負).

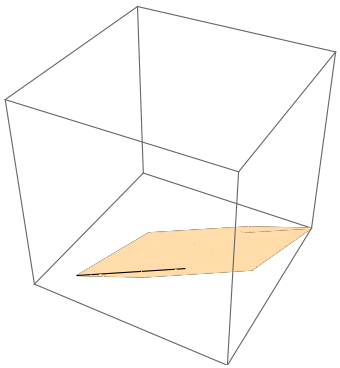
$A = \begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$
$\det A = 9$





$A = \begin{bmatrix}2&1&3\\1&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$
$\det A = 0$ (平面につぶれる場合)





L22-Q2

## Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

を 3 辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ の表す線形変換で写した.
写した先の平行六面体の体積を求めよう.

L22-Q3

## Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

を 3 辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ の表す線形変換で写した.
写す前後の平行六面体の体積の比を求めよう.

mobius K4.2.50

# 第 4 章 行列式の計算

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L23(2022-06-29 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-01 Fri 11:15 JST hig"

今日の目標

- 行列式を, 行基本変形で計算できる

L22-Q1 結果は 加藤 線形代数 定理 3-2(p.121) 参照.

L22-Q2

Quiz 解答: 体積拡大率

$\det A \times \det[\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3] = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11 = 660.$

L22-Q3

Quiz 解答: 体積拡大率

$\det[\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{b}_3] = 51.$ よって, $1 : 51.$

# 大注意

$A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n], B$ : $n$ 次正方行列, $c \in \mathbb{R}$.
多重線形性は

- $\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, c\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n] = c\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$
  だけど, $\det(cA) \neq c\det(A)$
- $\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n] =$
  $\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{b}, \cdots \boldsymbol{a}_n] + \det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{c}, \cdots \boldsymbol{a}_n]$
  だけど, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

次は正しい.

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $\det(cA) = c^n \det(A)$.

# ここまで来たよ

22 第 4 章 行列式 (行列式 2)

23 第 4 章 行列式の計算
- ◆還元定理|3. 行列式の計算

# ◆還元定理

還元=reduction, 還元する=小さいものに帰着させる?

加藤 線形代数 定理 3-1(p.119)

## 定理 1

$(1,(n-1)) \times (1,(n-1))$ にブロック分けされた行列 に対して

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & * \cdots * \\ \mathbf{0} & A' \end{bmatrix} = a_{11} \det(A').$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots 0 \\ * & A' \end{bmatrix} = a_{11} \det(A').$$

## 証明

$\det(A) = \det({}^{t}A)$ より後者だけ証明すれば十分.

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$a_{1i}$ $a_{11}$ 以外 0 なので, は $\sigma(1) = 1$ でないものは成分の積が 0 になる.
$\{2, \cdots, n\}$ の置換を $\sigma'$ と書き

$$= \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{11} a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$

$$= a_{11} \sum_{\sigma'} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)} = \quad a_{11} \times \det(A').$$

加藤 線形代数 練習 2(2)(p.102)

加藤 線形代数 系 3-1(p.120)

## 系 2 (上三角行列・下三角行列の行列式)

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次の上三角行列のとき,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

### 証明 ($n$ に関する数学的帰納法)

- $n = 1$ のとき, $\det A = a_{11}$.
- $n = k$ **のとき正しいと仮定する.**
  $n = k+1$ のとき, 還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(1) より, $\det A = a_{11} \det A'$.
  $A'$ は $k$ 次の上三角行列なので, 帰納法の過程より, $\det A' = \prod_{i=2}^{k+1} a_{ii}$.
  よって, $\det A = \prod_{i=1}^{k+1} a_{ii}$. **すなわち,** $n = k+1$ **のときも正しい.**

下三角行列についても同様 下三角は上三角の転置だから

加藤 線形代数 定理 2-4(p.113).

# 基本行列と行列式

加藤 線形代数 定理 2-7(p.116) $A, B$: $n$ 次の正方行列に対して,
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) 任意の正則行列 $A$ は基本行列 $P_{ij}, P_i(c), P_{ij}(a)$ の積で $A = PP'P'' \cdots$ と書ける (どう書けるかは, 逆行列を求める過程=簡約階段形にする過程でわかる).

加藤 線形代数 定理 3-2(p.121) 基本行列の行列式は計算済.

## 定理 3 (基本行列の行列式)

1. $\det(P_{ij}) = -1$.
2. $\det(P_i(c)) = c$.
3. $\det(P_{ij}(a)) = 1$.

$\rightsquigarrow \det A = \det P \times \det P' \times \cdots$ で求まるじゃん?

基本行列をかける = 基本操作する

加藤 線形代数 定理 3-3(p.122)

## 定理 4 (基本操作と行列式)

$A$ に次の基本操作をして得た行列を $B$ とする.

$A \overset{R,C}{\to} B$.

| | 基本操作 | 行列式 |
|---|---|---|
| 行基本操作 R1 | $[i] \leftrightarrow [j]$ | $\det A = (-1) \times \det B$ |
| 行基本操作 R2 | $[i] \times c$ | $\det A = \frac{1}{c} \times \det B$ |
| 行基本操作 R3 | $[j] \times a + [i]$ | $\det A = \det B$ |
| 列基本操作 C1 | $[i$列$] \leftrightarrow [j$列$]$ | $\det B = (-1) \times \det B$ |
| 列基本操作 C2 | $[i$列$] \times c$ | $\det A = \frac{1}{c} \times \det B$ |
| 列基本操作 C3 | $[j$列$] \times a + [i$列$]$ | $\det A = \det B$ |

# 教科書お奨めの自由な計算手順

行列式を $=$ でつないで計算していく．定数倍がでたときはそれを記す．

加藤 線形代数 p.123

- R1–3, C1–3, 還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119) を「いい感じの順序で使って」上下三角行列や, $3 \times 3$ 以下に持っていく
- 上下三角行列になったら 加藤 線形代数 系 3-1(p.120), $3 \times 3$ 以下になったら 加藤 線形代数 例 1,2(pp.107-108) で計算して終了
- 途中で行列式ゼロ条件 加藤 線形代数 系 2-1(p.112), 練習 5(p.116) が満たされたら即強制終了

加藤 線形代数 例題 1, 練習 5(p.123) mobius K4.2.10

# あいまいさのないアルゴリズム

入力: $n$ 次正方行列 $A$

- (逆行列を求めるのと同じ) 行基本操作 (次のページ) で簡約階段形にしていく
  - ただし, 主成分 ($0$ ではない) は $1$ にしてもしなくてもよい
  - ただし, 主成分の上側の成分はゼロにしなくてよい
  - 主列でない列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
  - $0$ ばかりの行, 列, 定数倍の行, 列が現れたら, その瞬間 $\det A = 0$ を出力して終了
- 上三角行列になった段階で, 係数かける対角成分の積を出力
- 残りの右下ブロックが $2 \times 2$, $3 \times 3$ になったら, 公式と還元定理を使ってもよい

`https://bit.ly/rrmatrix`

還元定理は,「右下ブロックだけ見る」ことに相当

# 復習: 掃き出し法の概要

加藤 線形代数 pp.54–56 | 線形代数☆演習 I(2022)L15

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

## 掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ
(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 $c$ を持っていってピボットにする
(3) 持っていった非零成分を R2 ($[1] \times 1/c$) で 1 にする
(4) R3 $[j] \times a + [i]$ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目を零にする
(10) R3 $[1] \times a + [i]$ で, ブロックのその列の上側を零にする
(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う
(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.

大注意 1 個の矢印に複数の操作: 逐次適用 (略記) はいいけど,
同時適用は間違った結果になる

# 簡約階段形や逆行列を求める，と，行列を求める，との違い

| 求めるもの | 簡約階段形, 方程式の解, 逆行列 | 行列式の値 |
|---|---|---|
| 対象<br>つなぐもの<br>許される操作<br>ゴール<br>併用できる操作 | 行列 $\begin{bmatrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{bmatrix}$, $\left[\begin{array}{cc|cc} \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 1 \end{array}\right]$<br>$\rightarrow$<br>R のみ (*)<br>簡約階段形 | 行列式 $\det \begin{bmatrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{bmatrix}$, $\begin{vmatrix}\bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet\end{vmatrix}$<br>$=$<br>R と C<br>(上) 三角行列<br>還元，展開 (来週)，サラスの公式 $(3 \times 3)$, 行列式が 0 になる十分条件 |

(*) 簡約階段形から進んで標準形 加藤 線形代数 定理 1-2(p.81) を求めるときは C も使います.

線形代数 I を通過した人は, 区別して完璧に実行できるべき手順.
レポート方式の Trial で対比して確認します.

# 4.4 行列式の展開

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L24(2022-07-01 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-01 Fri 11:23 JST hig"

今日の目標

- 行列式を, 余因子展開で計算できる
- 逆行列の公式を説明できる

# ここまで来たよ

23 4.4 行列式の計算

24 4.4 行列式の展開
- ◆余因子|4. 行列式の展開
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- ◆余因子行列|4. 行列式の展開

# ◆余因子

## 今日の動機

- 第 1 行や第 1 列と限らず, ゼロ成分が多い行や列があったときに還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119) 的な操作をしたい
- これに該当しないときも, 強引に行列式の次数を reduce したい
  - 基本変形 (の前半) 加藤 線形代数 例題 1(p.123) はひとつの方法

加藤 線形代数 p.124 加藤 線形代数 定義 4-1(p.125)

### 定義 1 (小行列式と余因子)

$A$: $n$ 次の正方行列 のとき,
$A$ の $(i,j)$ 小行列式 (minor) $m_{ij} \in \mathbb{R}$ を, $A$ から第 $i$ 行, 第 $j$ 列を取り除いた $(n-1)$ 次の正方行列の行列式と定義する.
$A$ の $(i,j)$ 余因子 (adjugate) $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \in \mathbb{R}$ と定義する.

小行列 (submatrix) は, 1 行 1 列とは限らず複数の行と列を取り除いて得られる行列をさす言葉. 部分行列?

例 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} =$ , $\begin{matrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{matrix} =$ .

加藤 線形代数 例 1, 練習 1(p.124), 例 2, 練習 2(p.125) mobius 4.4.10

# ここまで来たよ

23 4.4 行列式の計算

24 4.4 行列式の展開
- ◆余因子|4. 行列式の展開
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- ◆余因子行列|4. 行列式の展開

# ◆行列式の余因子展開

展開 (expansion) 1 個の複雑なものを, 単純なもの複数の和として書くこと

加藤 線形代数 定理 4-1(p.125)

## 定理 2 (余因子展開)

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次の正方行列
$\tilde{a}_{ij}$: $A$ の $(i,j)$ 余因子 のとき,

- $\forall i \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{i\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{\ell j}$. ($j$ 列目における余因子展開)

証明 $i$ 行目に行多重線形性を適用する. 交代性を使って, $a_{i\ell}$ を $(1,1)$ に持っていく. この時出る符号は $(-1)^{i-1+\ell-1}$. 還元定理を使う.

加藤 線形代数 例 3, 例題 1(p.127), 練習 4(p.128) mobius 4.4.30 mobius 4.4.50

## 証明の実演 $i = 2$ 行目についての余因子展開. 右側切れてます.

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ a & b & c & d \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{多重線形性}}{=} \det\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 11 & \\ 0 & \\ 31 & \\ 41 & \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{交代性}}{=} (-1)^{i-1} \times \left( \det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & c & \\ 11 & 12 & 13 & \\ 31 & 32 & 33 & \\ 41 & 42 & 43 & \end{bmatrix} \right.$$

$$\overset{\text{交代性}}{=} (-1)^{i-1} \times \left( (-1)^0 \det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + (-1)^1 \det\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 13 & 14 \\ 32 & 31 & 33 & 34 \\ 42 & 41 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\overset{\text{還元定理}}{=} (-1)^{i-1} \times \left( a \det\begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 32 & 33 & 34 \\ 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + (-1)^1 b \det\begin{bmatrix} 11 & 13 & 14 \\ 31 & 33 & 34 \\ 41 & 43 & 44 \end{bmatrix} + (-1)^2 c \det \right.$$

$$\overset{\text{小行列式の定義}}{=} (-1)^{i+1} a m_{i1} + (-1)^{i+2} b m_{i2} + (-1)^{i+3} c m_{i3} + (-1)^{i+3} d m_{i4}$$

$$\overset{\text{余因子の定義}}{=} a\tilde{a}_{i1} + b\tilde{a}_{i2} + c\tilde{a}_{i3} + d\tilde{a}_{i4}$$

$$= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + a_{i3}\tilde{a}_{i3} + a_{i4}\tilde{a}_{i4}.$$

# 行列式の余因子展開 (一般形)

加藤 線形代数 定理 4-2(p.128)

## 定理 3 (余因子展開 (一般形))

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次の正方行列
$\tilde{a}_{ij}$: $A$ の $(i,j)$ 余因子

- $\forall i,k \quad \det(A)\delta_{ik} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j,k \quad \det(A)\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{k\ell}$. ($j$ 列目における余因子展開)

証明 $i = k$ で $\delta_{ik} = 1$ となるケースは上で証明した. $i \neq k$ の場合を示す.
$A$ で, $k$ 行目に, $i$ 行目を上書きコピーした行列を $B$ とする.
交代性より $0 = \det B$.
$\det B$ の $k$ 行目に関する余因子展開は $\det B = \sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell}\tilde{b}_{k\ell}$.
右辺で, コピーの結果 $b_{k\ell} = a_{i\ell}$,
余因子 $\tilde{b}_{k\ell}$ はコピーされた部分をはずしてるので, $\tilde{b}_{k\ell} = \tilde{a}_{k\ell}$.
$0 = \det B = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}$.

## $i \neq k$ の場合の証明の実演

$A$ の $i = 4$ 行を $k = 2$ 行にコピーして $B$ を作成.
$B$ を $k = 2$ 行で展開.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

$$0 = \det B = \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

$$= 41\tilde{a}_{21} + 42\tilde{a}_{22} + 43\tilde{a}_{23} + 44\tilde{a}_{24}$$

$$= a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + a_{i3}\tilde{a}_{k3} + a_{i4}\tilde{a}_{k4}.$$

# ここまで来たよ

23 4.4 行列式の計算

24 4.4 行列式の展開
- ◆余因子|4. 行列式の展開
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- ◆余因子行列|4. 行列式の展開

# 余因子行列

動機 $\tilde{a}_{k\ell}$ じゃなくて $\tilde{a}_{\ell k}$ だったら行列の積の形になるのに…

加藤 線形代数 p.129

## 定義 4 (余因子行列)

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次正方行列, その余因子 $\tilde{a}_{ij}$ のとき
$A$ の余因子行列 $\tilde{A} = [b_{ij}]$ を, $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ である $n$ 次正方行列と定義する.

余因子を素直に行列状に並べた後転置したもの.

例

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}.$$

加藤 線形代数 定理 4-3(p.129)

## 定理 5 (余因子展開 (行列形))

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次の正方行列,
$\tilde{A}$: $A$ の余因子行列 のとき,

$$\det(A) \times E = A\tilde{A} = \tilde{A}A$$

証明 加藤 線形代数 定理 4-2(p.128) の和を, 行列の積とみただけ
加藤 線形代数 定理 4-3(p.129) の系 加藤 線形代数 系 4-1(p.129)

## 定理 6 (逆行列の明示公式)

$A$: $n$ 次の正則行列,
$\tilde{A}$: $A$ の余因子行列 のとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$$

計算問題には使わないこと.
例 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^{-1} =$

加藤 線形代数 定理 4-4(p.130)

## 定理 7 (正則行列の特徴づけ)

$A$: $n$ 次の正方行列 のとき
次は同値

(a) $A$ は正則
(b) $\operatorname{rank} A = n$「フルランク」
(c) $\det(A) \neq 0$

- 証明済
  - (a)⇔(b) 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)
  - (a)⇒(c) 加藤 線形代数 系 2-2(p.118)
- ここで証明
  - (c)⇒ (a) 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129) より, $\det(A) \neq 0$ なら $A^{-1}$ が存在する.

# 第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L25(2022-07-06 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-06 Wed 07:20 JST hig"

今日の目標

- ベクトル空間の部分空間である/でないことを証明できる
- 同次連立 1 次方程式の解空間を求められる

# ここまで来たよ

24 4.4 行列式の展開

25 第 5 章 ベクトル空間
- 1. 部分空間
- (復習) ◆同次連立 1 次方程式
- 2. 1 次独立と 1 次従属

# ◆ベクトル空間

加藤 線形代数 pp.136-143 ベクトル空間 (vector space) という一般の概念, 定義があり, これまで自然に扱ってきた 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ はその典型例になっている. 線形代数☆演習 II(2022)L??

教科書は一般的のベクトル空間の定義 加藤 線形代数 定義 5-1-1(p.141) に基づいて話をしているが,

授業では $\mathbb{R}^n$ という具体例に限定して説明する. 教科書は

$V = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}$ と思って利用しよう.

# ◆部分空間

## 定義 (5-1-2 部分空間 加藤 線形代数 p.144)

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ の部分集合 $W \subset V$ について, 次の条件が満たされるとき, $W$ は $V$ の部分空間 (subspace), 部分ベクトル空間 (vector subspace) であるという.

S1 $\mathbf{0} \in W$
S2 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W \Rightarrow \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W$　　'$W$ は和で閉じている'
S3 $\boldsymbol{v} \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\boldsymbol{v} \in W$　　'$W$ はスカラー倍で閉じている'

例になっている, 例になっていない証明 加藤 線形代数 例 1, 例題 1, 練習 3(p.145)

L25-Q1

## ベクトル空間の部分空間

$V = \mathbb{R}^2$.

1. $W_1 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} | x + 2y = 0\}$ は $V$ の部分空間か.
2. $W_2 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} | x + 2y = 2\}$ は $V$ の部分空間か.
3. $W_3 = \{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} | x = 0 \text{または} y = 0\}$ は $V$ の部分空間か.

## 方針

- であることの証明: A ならば B(A⇒B) を証明するには, A を仮定して B(S1,S2,S3 のすべて) を言う.
- でないことの証明: S1 を満たさないことを言うか, 反例 (S2 または S3 を満たさない $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の例) を挙げる.

## 定理 (5-1-1 同次連立 1 次方程式の解空間 加藤 線形代数 p.146)

$V = \mathbb{R}^n$
$A$: $m \times n$ 行列のとき,
$A$ を係数行列とする同次連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad (**)$$

の解 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V$ の全体

$$W = \{\boldsymbol{v} | A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} \subset V$$

は $V$ の部分空間をなす. この部分空間 $W$ を (**) の解空間という.

同次連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.69

# 証明

# ここまで来たよ

24 4.4 行列式の展開

25 第 5 章 ベクトル空間
- 1. 部分空間
- (復習) ◆同次連立 1 次方程式
- 2. 1 次独立と 1 次従属

# ◆同次連立 1 次方程式 線形代数☆演習 I(2022)L16 加藤 線形代数 p.69

## 定義 (同次連立 1 次方程式 加藤 線形代数 p.69)

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ が

1. 同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
2. 非同次連立 1 次方程式 $\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$

同次=斉次=homogeneous(等質)=次数が同じ (今の場合, 各項が 1 次)

## 命題

同次方程式はつねに自明 (trivial) な解 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を持つ

## 定義 (非自明な解)

同次方程式の $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を非自明 (non-trivial) な解という

## 定理 (2-3-3 同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在 加藤 線形代数 p.69)

$A$ を $m \times n$ 行列とする.
同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (**) は

1. $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow$ (**) は自明な解しか持たない
2. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ (**) は非自明な解を持つ

- $\boldsymbol{0}$ は自明な解.
  - 同次連立 1 次方程式の解空間の直線や平面は原点を通る.
- 自明な解しか持たないなら, 解は一意に定まる.
  - 解空間が 1 点の場合のこと.
- 非自明な解が存在するなら, 無限個の解が存在する.
  - 解空間が直線や平面のときが, 非自明な解があるとき.

加藤 線形代数 例題 4, 練習 5(p.70), 章末問題 3(p.72) mobius K2.3.50

# 例題

L25-Q2

## 同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

であるとき, $A$ を簡約階段形に変形して, $\operatorname{rank} A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^2$ に描こう.

L25-Q3

## 同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

であるとき, $A$ を簡約階段形に変形して, $\operatorname{rank} A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^3$ に描こう.

L25-Q4

## 同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -5 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

であるとき, $A$ を簡約階段形に変形して, $\operatorname{rank} A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^2$ に描こう.

L25-Q5

## 同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

であるとき, $A$ を簡約階段形に変形して, $\operatorname{rank} A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^3$ に描こう.

L25-Q6

## 同次連立 1 次方程式の解空間

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

であるとき, $A$ を簡約階段形に変形して, $\operatorname{rank} A$ を求めよう. 非自明な解はあるか? 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解を求め, 解空間を $V = \mathbb{R}^2$ に描こう.

# ここまで来たよ

24 4.4 行列式の展開

25 第 5 章 ベクトル空間
- 1. 部分空間
- (復習) ◆同次連立 1 次方程式
- 2. 1 次独立と 1 次従属

# ◆1 次結合

**定義 (1 次結合** 加藤 線形代数 p.152 **)**

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ のとき,
$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ を「 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合 (linear combination) 」という.

## 系 (5-2-1 1 次結合からなる部分空間 加藤 線形代数 p.153)

$V = \mathbb{R}^m$.
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合全体の集合
$W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ は, $V$ の部分空間.

証明 加藤 線形代数 定理 2-1(p.152)

## 定義 (5-2-1 生成された部分空間 加藤 線形代数 p.153)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
部分空間 $W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ のとき,

- $W = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ と書く. 初めて出てきた記号
- $W$ を, $v_1, \cdots, v_n$ で生成された (generated) 部分空間という.
- $W$ を, $v_1, \cdots, v_n$ で張られた (spanned) 部分空間という.
- ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ は $W$ を生成する (generate), 張る (span) という
- ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ は $W$ の生成系 (generating set, spanning set) であるという.

$V = \mathbb{R}^m$ の部分空間は必ず生成系を持つ (有限生成である=上の定義より生成系は有限個のベクトルからなることから)

加藤 線形代数 例 1,2, 練習問題 1,2,3(pp.153–154)

例

原点を通る, パラメタ表示された直線や平面 線形代数☆演習 I(2022)L04 は, $V = \mathbb{R}^n$ の部分空間.

$\{\boldsymbol{a}t | t \in \mathbb{R}\}$

$\{\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s | s, t \in \mathbb{R}\}$

原点を通る $\Leftrightarrow$ パラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ で $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

# 外伝: 数式処理とは

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L26(2022-07-08 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-14 Thu 06:47 JST hig"

今日の目標

- 数式処理を使う方法を説明できる
- 数式処理 Maple で線形代数の計算ができる
- 数式処理 Maple で微積分の計算ができる

# ここまで来たよ

25 5.1 ベクトル空間

26 外伝: 数式処理とは
- 数式処理システム Maple
- Fields Medals at ICM2022

# Maple とは

`https://jp.maplesoft.com/products/maple/`
Waterloo University, Canada で開発され Maplesoft 社で開発・販売される数式処理システム.
ライバル Mathematica, sympy.
数式処理システム (Computer Algebra System) とは
量を整数変数 (int) に記憶して扱うのでなく, 数式を文字列として (実はもっとハイテクな方法で) 記憶して処理するシステム. 無限大なども扱える. `"a+b"` と `"b+a"` は文字列として異なるが, 数式処理システムは, 表す数式が等しいことを知っている.
その意味ではコンパイラに似てる面がある?

数学研究でハードに使われてる

# Maple の起動

1. 実習室の Windows 10 を起動
2. Window ボタン > 数学・統計・分析 > Maple > Maple 2021 (を起動)
3. Word と思って. docx のかわりに .mw (Maple Worksheet)
4. ファイル > 開く 配布したファイル
5. ファイル > 新規作成 > ワークシートモード
6. ファイル > 名前をつけて保存, で Maple Worksheet 形式を選ぶ, 場所は PC > デスクトップ
7. 最後に `https://moodle.hig3.net` の teamL26 にドラッグして提出.

# Maple Worksheet

- Enter 計算実行
- Shift+Enter 計算実行せず改行

左端の二重線　ブロック区切り
　T ボタン　テキストブロックを作る
　> ボタン　コードブロックを作る
　左端の >　プロンプト この右にコードを入力する



; 行の最後 (or 次の行との区切り) 省略可 (C でいう;)
: 非表示行末
:= 変数への代入 (C でいう=)
= 条件 (C でいう==)
# コメント (C でいう//)

- 挿入 > Maple Input で, Mobius のテキスト入力相当 (お奨め) になる
- 挿入 > 2D Math で, Mobius の数式エディタ相当になる.
- 環境設定から, どちらをデフォルトにするか選べる (初期は 2D Math)

# Maple の文法

Mobius の解答入力と共通点多い
線形代数ライブラリの導入
行列, 列ベクトル, スカラー
の変数代入

```
with(LinearAlgebra):
A:=<<1,2>|<3,4>>;
B:=<<5,6>|<7,8>>;
v:=<5,6>;
c:=-5
```

$A + B$

$AB$

$A^3\boldsymbol{v}$

$c\boldsymbol{v}$

$A^{-1}$

$\det A$

$A \to$ 行簡約階段形

```
A + B;
A . B; # . は非可換な積
A^3 . v;
c * v;
MatrixInverse(A);
Determinant(A);
ReducedRowEchelonForm(A);
```

# 過程表示 Step-by-step solution

掃き出し法による行簡約階段形

```
with(Student:-LinearAlgebra):
GaussJordanEliminationTutor(A, output=steps)
```

方程式の解

```
with(Student:-Basics):
SolveSteps([12*x+y=18,7*x-8*y=23])
```

# 実習課題

1. 配布したサンプル Maple Worksheet の好きな場所に好きなように加筆して, 次の計算をしよう.

$$\left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2. mobius Trial L26 の自分の問題を取得する. 配布したサンプル Maple Worksheet の好きな場所に好きなように加筆して, 最終結果の逆行列と行列式を計算してメモしておこう.
3. 以上の加筆を行った Maple Worksheet (ファイル名自由) を, Moodle の team26 を開き,「追加する」からドラッグ&ドロップで提出しよう.

# 龍大内で Maple を使える PC と場所

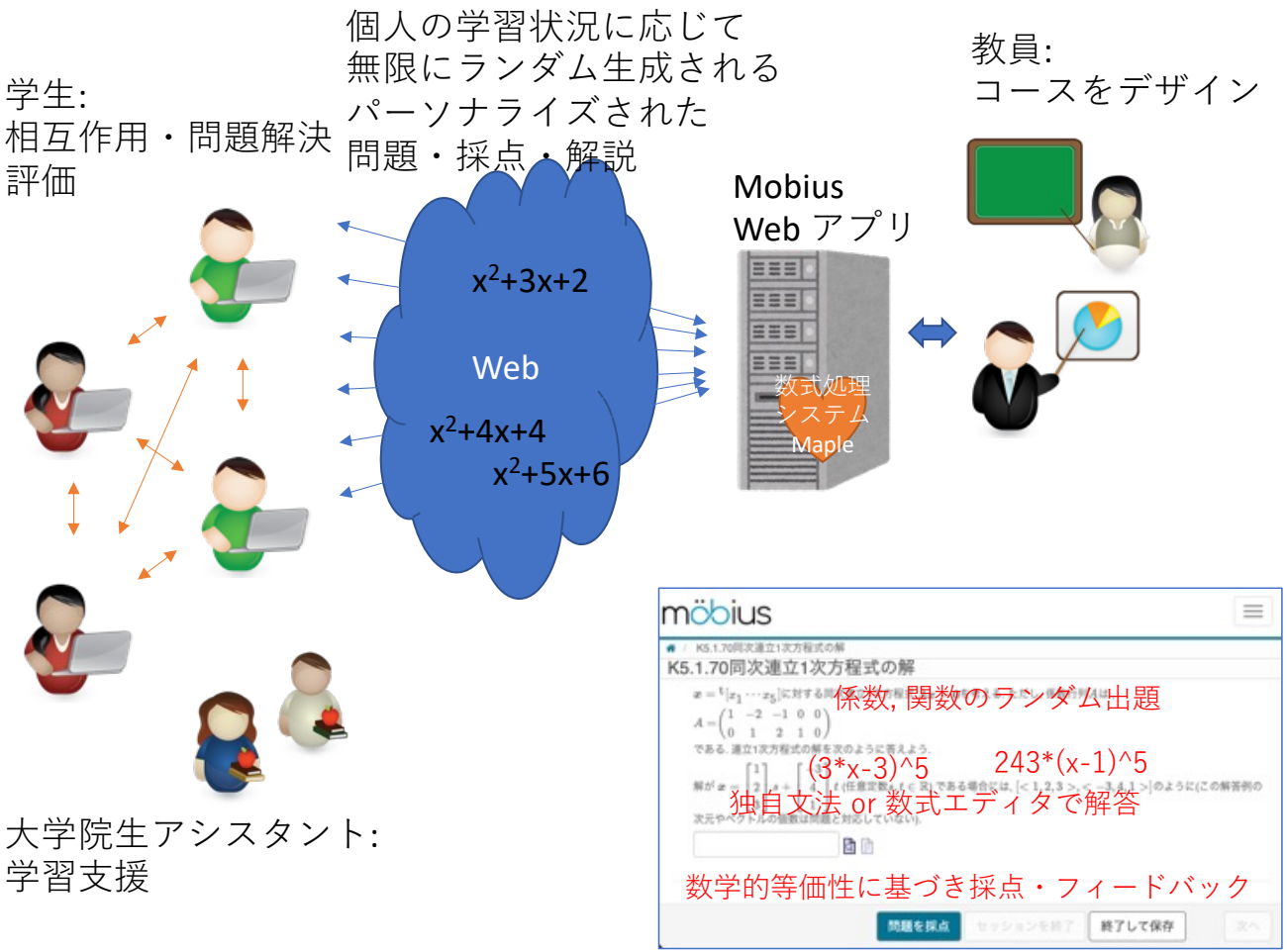
先端理工学部がサイトライセンスに加入しているため「キャンパス内では無料で」使用できます.

- (無料) 瀬田の学内実習室 (3 号館地下, 1 号館 (含む 1-612)) の Windows 10 で
- (無料) ru-wifi に接続した個人 PC
  - 任意の場所で各自でダウンロード, インストールした後, 使用時には ru-wifi に接続する. 使用時に activation (有効化) する.
  - 案内 (全学認証) `https://drive.google.com/drive/folders/1X1Knm50cT8oV-B3365clm9AFwtyNpWxi`
- (有料) サイトライセンスに頼らず, 生協で学生版 (Win/Mac) を購入 `https://software.univcoop.or.jp/item/13328`
  - ru-wifi への接続の必要なし
  - 在学中のみ利用可
  - Maple 2022 学生版は税込 13200 円

いずれも学習目的に限定.

# Web アプリケーション, 学習支援システムとは

Mobius は, 数式処理システム Maple をバックエンドとして, Web アプリケーション として構築された学習支援システム



# 文章題は解ける?

- 数式処理システムは, 数式 1 個言われると, 知ってること全部を饒舌に返すのが得意.
- 長い問題文を読んで, きかれてることだけ, や Yes/No を答えるのは苦手.
  - かつて東ロボくんは目指していた `https://www.ted-ja.com/2017/09/noriko-arai-can-robot-pass-university.html`
- 自動翻訳や要約のような自然言語処理で, 問題文を読んで答えることができそうになってきた.
  - Solving Quantitative Reasoning Problems with Language Models
  - 数学の問題というより, 国語の作文の問題としてとらえる.

# Maple で 微積分

グラフ描画 plot a graph

```
plot(sin(x)^2);
```

微分 differentiate

```
diff(sin(x)^2,x,2);
```

原始関数 integral

```
int(sin(x)^2);
```

定積分 integral

```
int(sin(x)^2,x=0..Pi/2);
```

積分の過程表示

```
with(Student:-Calculus1):
ShowSolution(int(sin(x)^2));
```

# ここまで来たよ

25 5.1 ベクトル空間

26 外伝: 数式処理とは
- 数式処理システム Maple
- Fields Medals at ICM2022

# 国際数学者会議 ICM=International Congress of Mathematicians

4 年に 1 回開催. 国際数学者会議 Virtual ICM 2022

- 2022 ICM St. Petersberg → Helsinki
- 1990 ICM Kyoto 京大数理研は世界的に有名

# フィールズ賞 Fields Medals

- ‘数学のノーベル賞’
- 4 年に 1 回の ICM の際に授与, 40 歳以下, 2–4 名, 200 万円.
- 2022 年度の受賞者
  - 注目: Hugo Duminil-Copin, ‘For solving longstanding problems in the probabilistic theory of phase transitions in statistical physics, especially in dimensions three and four’.
- 過去の受賞者 フランスが USA と同じくらい多いのは…

# 5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L27(2022-07-13 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-13 Wed 20:20 JST hig"

今日の目標

- ベクトルを, 与えられたベクトルの 1 次結合で書ける
- 同次連立 1 次方程式の解空間の生成系を求められる



# ここまで来たよ

26 数式処理システム

27 5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間
- 2. 1 次独立と 1 次従属

# ◆1 次結合

**定義 (1 次結合** 加藤 線形代数 p.152 **)**

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ のとき,
$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$ を「 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合 (linear combination) 」という.

1 次結合=線形結合

L27-Q1

## Quiz(1 次結合)

$V = \mathbb{R}^2$ のベクトルを考える.

1. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ の, 係数 $a_1 = 3, a_2 = 5$ による 1 次結合 $\boldsymbol{w}$ を求めよう.
2. 上で求めたベクトルを $\boldsymbol{w}$ を, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合として書いたときの係数を求めよう.

L27-Q2

## Quiz(1 次結合としての表現)

ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ を, ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ の線形結合として書こう (=係数を見つけよう)

# 1 次結合として書くときの係数の求め方

## 1 次結合として書くときの係数

$V = \mathbb{R}^m$: ベクトル空間,
与えられたベクトル $\boldsymbol{w} \in V$ が, 与えられたベクトルたち $\boldsymbol{v}_i \in V$ の 1 次結合で書けるかを判定し, 書けるなら係数 $a_i \in \mathbb{R}$ を知るには,
$a_i$ を未知数として非同次連立 1 次方程式を立てて, 解く 加藤 線形代数 例題 1(p.62).
解なしなら書けない.

L27-Q3

## Quiz(1 次結合としての表現)

ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^3$

1. ベクトル $\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ は, これらのベクトルの 1 次結合で書けるか. 書けるなら係数を見つけよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$ は, これらのベクトルの 1 次結合で書けるか. 書けるなら係数を見つけよう.

mobius K5.2.10 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

L27-Q4

## Quiz(1 次結合としての表現)

ベクトル $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ を, ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, の線形結合として書こう (=係数を見つけよう).

## 系 (5-2-1 1 次結合からなる部分空間 加藤 線形代数 p.153)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合全体の集合

$$W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

は, $V$ の部分空間.

証明 加藤 線形代数 定理 2-1(p.152)

## 定義 (5-2-1 生成された部分空間 加藤 線形代数 p.153)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$,
部分空間 $W = \{a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n | a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$ のとき,

- $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ と書く. (初めて出てきた記号)
- $W$ を, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ で生成された (generated) 部分空間という.
- $W$ を, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ で張られた (spanned) 部分空間という.
- ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $W$ を生成する (generate), 張る (span) という
- ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $W$ の生成系 (generating set, spanning set) であるという.

$V = \mathbb{R}^m$ の部分空間は必ず生成系を持つ (有限生成である=上の定義より生成系は有限個のベクトルからなることから)

加藤 線形代数 例 1,2, 練習問題 1,2,3(pp.153–154)

例

原点を通る, パラメタ表示された直線や平面 線形代数☆演習 I(2022)L04 は, $V = \mathbb{R}^m$ の部分空間.

$\{\boldsymbol{a}t | t \in \mathbb{R}\}$

$\{\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}s | s, t \in \mathbb{R}\}$

原点を通る $\Leftrightarrow$ パラメタ表示 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ で $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

L27-Q5

## Quiz(部分空間の生成系)

$V = \mathbb{R}^3$ の部分集合 $W = \{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} | x_2 = 0\}$ を考える.

1. $W$ が $V$ の部分空間であることを示そう.
2. $W$ の生成系をみつけよう.

# 解空間の生成系の求め方

## 解空間の生成系

$V = \mathbb{R}^m$: ベクトル空間 のとき,
与えられた $n$ 元同次連立 1 次方程式の解空間 $W \subset V$ の生成系 (の 1 つ) を得るには,
同次連立 1 次方程式として解いて 加藤 線形代数 例題 1(p.62), 任意定数にかかるベクトルを集めてくればいい.
自明な解しかないとき, $W = \{\mathbf{0}\}$ なので生成系は空集合.

L27-Q6

## Quiz(同次連立 1 次方程式の解空間の生成系)

未知数 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix}$ に対する同次連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 10x_5 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

の解空間は $V = \mathbb{R}^5$ の部分空間である.
$W$ の生成系をみつけよう.

mobius K5.2.30 加藤 線形代数 例題 1(p.62)

# ◆1 次独立

## 定義 (1 次関係式 加藤 線形代数 p.155)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,

- $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ という, 1 次結合=0 の式を 1 次関係,1 次関係式という.
- $a_1 = \cdots = a_n = 0$ である 1 次関係式を自明な (trivial)1 次関係という
- $a_1, \cdots, a_n$ のうち少なくとも 1 つが 0 でない 1 次関係式を非自明な (non-trivial)1 次関係式という.

1 次関係式は, 自明, 非自明のいずれか一方になる.

L27-Q7

## Quiz(1 次関係の発見)

ベクトル $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ の 1 次関係式を (すべて) 見つけよう.

# ベクトルの 1 次関係式の見つけ方

## ベクトルの 1 次関係式の見つけ方

**0** を, 与えられたベクトルの 1 次結合として書く.

L27-Q8

## Quiz(1 次関係式の発見)

ベクトル $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\5\\8\\5\end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^4$ の 1 次関係式を (すべて) 見つけよう.

加藤 線形代数 例題 1(p.62)

# 5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L28(2022-07-15 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-15 Fri 17:12 JST hig"

今日の目標

- ベクトルの組について, 1 次独立/1 次従属 を判定できる



L27-Q1

Quiz 解答:1 次結合

1. $\boldsymbol{w} = 3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\18\end{bmatrix}$.
2. $\boldsymbol{w} = 6\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 18\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

L27-Q2

Quiz 解答:1 次結合としての表現

係数 $a_1, a_2$ に関するる連立 1 次方程式

$$a_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}$$

を解いて, $a_1 = 5, a_2 = 2$.

L27-Q3

Quiz 解答:1 次結合としての表現

1 次結合で書けるとして, 係数を $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ とする.

1.
$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

係数行列を $A = [\boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2]$ と書くと (非同次) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w}_1$ の解を見つけるという問題になる.
拡大係数行列 $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ を簡約階段化すると $\tilde{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
よって, $a_1 = 4, a_2 = -1$.

2. 拡大係数行列 $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ を簡約階段化すると $\tilde{B} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
解なし. 1 次結合としては書けない.

3. 任意定数が残る場合もある. このときは, 1 次結合として書く方法が複数個 (無限個) ある.

L27-Q4

## Quiz 解答:1 次結合としての表現

係数を $a_1, a_2, a_3$ とすると, 係数を定める連立 1 次方程式の拡大係数行列は $\tilde{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{smallmatrix}\right]$. これはすでに簡約階段形で, 解は,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}, \text{任意定数})$$

よって, 係数は $a_1 = 2 - c, a_2 = 5 - c, a_3 = c$ $(c \in \mathbb{R}, \text{任意定数})$.

L27-Q5

## Quiz 解答: 部分空間の生成系

1. 直接に定義の S1,S2,S3 をチェック, または, $x_3 = 0$ は同次連立 1 次方程式なので, 教科書 (加藤) 定理 5-1-1(p.146) から.
2. $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

# ここまで来たよ

27 数式処理システム

28 5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間
- 2. 1 次独立と 1 次従属

# ◆1 次独立

## 定義 (1 次関係式 加藤 線形代数 p.155)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ のとき,

- $a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ という, 1 次結合=0 の式を, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ の 1 次関係,1 次関係式という.
- $a_1 = \cdots = a_n = 0$ である 1 次関係式を自明な (trivial)1 次関係という
- $a_1, \cdots, a_n$ のうち少なくとも 1 つが 0 でない 1 次関係式を非自明な (non-trivial)1 次関係という.

1 次関係は, 自明, 非自明のいずれか一方になる.
1 次関係とは, $\boldsymbol{0}$ を与えられたベクトル達の 1 次結合として表したもの.
mobius K5.2.50

L28-Q1

## Quiz(1 次関係)

1. $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ の 1 次関係式を求めよう.
2. $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}5\\1\\2\\3\end{bmatrix}$ の 1 次関係式を求めよう.

## 定義 (5-2-2 1 次独立・1 次従属 加藤 線形代数 p.155)

$V = \mathbb{R}^m$,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in V$ に

- 非自明な 1 次関係が存在しないとき, $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は 1 次独立 (linearly independent) であるという.
- 非自明な 1 次関係が存在するとき (そういううまい $a_1, \ldots, a_n$ がとれるとき), $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ は 1 次従属 (linearly dependent) であるという.

depend = 依存する, in- dependent = 依存しない = 独立な
$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次独立とは,
$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$
直観的説明

- 1 次従属なら, 組のうちのどれかのベクトルは, 組の他のベクトルの 1 次結合で書ける ($n \geq 2$). 1 次独立ならそういうことはない.
- 1 次独立とは「ベクトルの組が, いろんなベクトルを 1 次結合で表すにあたって, 無駄がない」こと.

## 定理 (5-2-2 数ベクトルの 1 次独立性 加藤 線形代数 p.157, 系 5-2-2 前半 加藤 線形代数 p.158)

$V = \mathbb{R}^n$,
$r$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ に対して
$n \times r$ 行列 $A = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ \boldsymbol{v}_r]$ を考える.

- $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ が 1 次独立
  - $\Leftrightarrow$ 1 次関係式は自明なもののみ
  - $\Leftrightarrow$ 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解は自明な解 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ のみ.
  - $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = r$
- $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r\}$ が 1 次従属
  - $\Leftrightarrow$ 非自明な 1 次関係式がある
  - $\Leftrightarrow$ 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が非自明な解 $\boldsymbol{v}$ を持つ
  - $\Leftrightarrow \operatorname{rank} A < r$

加藤 線形代数 例題 2(p.158), 練習 6,7(p.159) mobius K5.2.70

L28-Q2

## Quiz(1 次独立・1 次従属)

次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルの組は 1 次独立かどうか, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\1\\2\\3\end{bmatrix}\right\}$

# L28-Q3

## Quiz(20220714-05-linear-independence)

次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルの組は 1 次独立か, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\-3\\-9\end{bmatrix}\right\}$

$r = n$ のとき

## 系 (5-2-2 後半=5-2-2 前半の特殊化の系)

加藤 線形代数 p.157, 加藤 線形代数 定理 5-2-2(p.157)

$V = \mathbb{R}^n$,
$r = n$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ に対して
$n \times n$ 行列 ($n$ 次の正方行列) $A = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2 \quad \boldsymbol{v}_n]$ を考える.
次は同値

- $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次独立
- $\operatorname{rank} A = n$
- $A$ は正則
- $\det(A) \neq 0$

復習

## 定理 (4-4-4 正則行列の特徴づけ 加藤 線形代数 p.130)

$A$: $n$ 次の正方行列 のとき
次は同値

(a) $A$ は正則
(b) $\operatorname{rank} A = n$「フルランク」
(c) $\det(A) \neq 0$

L28-Q4

## Quiz(1 次独立・1 次従属)

次の $\mathbb{R}^2$ のベクトルの組は 1 次独立かどうか, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
3. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
4. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right\}$
5. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right\}$
6. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$

# 5.3 基底と次元|第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお　hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L29(2022-07-20 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-20 Wed 07:32 JST hig"

今日の目標

- 1 次独立/1 次従属 をイメージできる
- ベクトルの組が基底かどうか判定できる

L28-Q1

## Quiz 解答:1 次関係

1. 係数行列 $A = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3]$, 1 次結合の係数 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ とすると, 1 次関係式は, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ になる.
   行基本変形で $A$ を簡約階段化すると, $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ よって, 解は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. 自明な 1 次関係式 $0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ のみが成立する.
2. 係数行列 $A = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3]$, 1 次結合の係数 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ とすると, 1 次関係式は, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ になる.
   行基本変形で $A$ を簡約階段化すると, $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ よって, 解は $a_1 = -3c, a_2 = -c, a_3 = c$ $(c \in \mathbb{R}$, 任意定数$)$.
   非自明な 1 次関係式 $-3c\boldsymbol{v}_1 - c\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad (c \in \mathbb{R})$ がある.
   (定数 $(\neq 0)$ 倍したものがまた非自明な 1 次関係式になるのは明らかなので, (きれいになるたとえば $c = -1$ を代入した式だけを見せて)

「非自明な 1 次関係式 $3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ がある」とだけ言うことが多い)

L28-Q2

## Quiz 解答:1 次独立・1 次従属

1. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする.

   $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ $(a_i \in \mathbb{R})$ とおくと, 係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ に対して, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ が成立する. 行基本変形で $A$ を簡約階段化すると, $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   よって, 解は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. 自明な 1 次関係式 $0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ のみが成立するので, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は 1 次独立である.

2. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ とする.

   $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ $(a_i \in \mathbb{R})$ とおくと, 係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ に対して, 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ が成立する. 行基本変形で $A$ を簡約階段化すると, $A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ よって, 解は

   $a_1 = -3c, a_2 = -c, a_3 = c$ $(c \in \mathbb{R}$, 任意定数$)$.
   非自明な 1 次関係式 $3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ があるので, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は 1 次従属である.

L28-Q3

## Quiz 解答:1 次独立・1 次従属

1. 自明な 1 次関係しかないので 1 次独立.
2. 非自明な 1 次関係 $2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ があるので 1 次従属.

# ここまで来たよ

28 5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間

29 5.3 基底と次元|第 5 章 ベクトル空間
- 2. 1 次独立と 1 次従属
- 3. 基底と次元
- Wolfram Alpha での行列計算

# ◆1 次独立性と 1 次結合

## 定理 (5-2-3 1 次独立性と 1 次結合 加藤 線形代数 p.160)

$V = \mathbb{R}^m$,
$V$ のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次独立,
ならば
「$\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける, ならば, その書き方は一意的」

「書き方は一意的」$\Leftrightarrow$「書く書き方は 1 通り」$\Leftrightarrow$ 係数 $a_i$ が 1 通りに定まる.

証明

「一意的」の証明方針: 2 つの書き方を変数でおいて, 実は等しくなる, という.

## 定理 (5-2-3 の逆 加藤 線形代数 練習 10(p.160))

$V = \mathbb{R}^m$,
$V$ のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ ~~が 1 次独立~~,
「$\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける, ならば その書き方は一意的」
ならば,
$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は 1 次独立.

## 1 次独立の特徴づけ

ベクトルの組が 1 次独立であるとは, 別のベクトルが組の 1 次結合で書けるなら一意的, であること.

## 定理 (5-2-4 1 次結合による表現可能性 加藤 線形代数 p.161)

$V = \mathbb{R}^m$
$V$ のベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次独立
$\boldsymbol{w} \in V$ のとき,

1. $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}\}$ が 1 次従属 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける
2. 対偶「1 次結合で書けないベクトルを追加しても, 組は 1 次独立のまま」

証明

L29-Q1

## Quiz(1 次独立・1 次従属)

次の $\mathbb{R}^2$ のベクトルの組は 1 次独立かどうか, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
3. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
4. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right\}$
5. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right\}$
6. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$

加藤 線形代数 定理 2-2(p.157), 系 2-2(p.157)　mobius K5.2.70

# ここまで来たよ

28 5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間

29 5.3 基底と次元|第 5 章 ベクトル空間

- 2. 1 次独立と 1 次従属
- 3. 基底と次元
- Wolfram Alpha での行列計算

# ◆基底

## 定義 (5-3-1 基底 加藤 線形代数 p.162)

$W \subset V = \mathbb{R}^m$ 部分空間, ベクトル空間,
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in W$, のとき,

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $W$ の基底 (basis, 複数形 bases)
$\Leftrightarrow$

(B1) $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$
(B2) $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は 1 次独立

加藤 線形代数 は $W$ でなく一般のベクトル空間 $V$ としているが, ここでは $\mathbb{R}^m$ の部分空間に限定.
まずは $W = V = \mathbb{R}^m$ をイメージしよう.
加藤 線形代数 定義 2-1(p.153) (B1)$\Leftrightarrow$「$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $W$ を生成する」
$\Leftrightarrow$「任意の $\boldsymbol{w} \in W$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける」

## 例 (5-1 加藤 線形代数 p.162)

$(W = V = \mathbb{R}^n)$

基本ベクトルすべての組 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は

$\mathbb{R}^n$ の基底 ($\mathbb{R}^n$ の標準基底とよばれる)

(B1)
(B2)

**命題** (加藤 線形代数 なし)

$W = V = \mathbb{R}^m$ のとき,
ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が $W$ を生成する $\Leftrightarrow \mathrm{rank}[\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \boldsymbol{v}_n] = m$.

**証明**
生成するとは, 任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $[\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w}$ が解を持つこと. 加藤 線形代数 系 3-1(p.67) などから.

**例**標準基底や, それにベクトルを追加したものは, $\mathbb{R}^m$ を生成する.

## 命題 (加藤 線形代数 なし)

$(W = V = \mathbb{R}^n)$
$\mathbb{R}^n$ の 1 次独立なベクトルの組で, $n$ 個からなるもの $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底.

## 系 (加藤 線形代数 なし)

$(W = V = \mathbb{R}^n)$
$\mathbb{R}^n$ の $n$ 個からなるベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ について,
$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の基底 $\Leftrightarrow \det[\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n] \neq 0$.

L29-Q2

## Quiz(基底)

次の $\mathbb{R}^2$ のベクトルの組は $\mathbb{R}^2$ を生成するか, $\mathbb{R}^2$ の基底か, 答えよう.

1. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
2. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$
3. $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
4. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}\right\}$
5. $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right\}$
6. $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$

mobius K5.3.10

# 1 次独立 対 生成 対 基底

$\mathbb{R}^m$ のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$.
$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$.

| | 1 次独立 | $\mathbb{R}^m$ の基底 | $\mathbb{R}^m$ を生成 |
|---|---|---|---|
| 定義 | 加藤 線形代数 定義 2-2(p.155) | 加藤 線形代数 定義 3-1(p.162) | 加藤 線形代数 定義 2-1(p.153) |
| 判定条件 | $\operatorname{rank} A = n$ | $\operatorname{rank} A = n = m$ | $\operatorname{rank} A = m$ |
| 特徴付け | ベクトル $\boldsymbol{w}$ が組の 1 次結合で書けるなら一意的 | 任意のベクトル $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ が組の 1 次結合で一意的に書ける | 任意のベクトル $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ が組の 1 次結合で書ける |
| 成立に有利 (必要条件的) | $n$ 小 | $n = m$ | $n$ 大 |

# ここまで来たよ

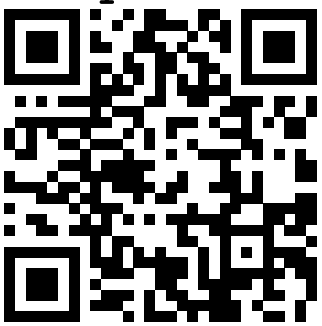
28 5.2 1 次独立 1 次従属|第 5 章 ベクトル空間

29 5.3 基底と次元|第 5 章 ベクトル空間
- 2. 1 次独立と 1 次従属
- 3. 基底と次元
- Wolfram Alpha での行列計算

# Wolfram Alpha での行列の計算 I

https://www.wolframalpha.com/examples/Matrices.html

https://www.wolframalpha.com



行列

$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$

```
{{1,2},{3,4}}
{5,6}
```

Wolfram Alpha では変数代入できない (電卓的) ので毎回入力してください.

行列と行列, 行列とベクトルの積はピリオド

$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$

```
{{1,2},{3,4}}  .  {{5,6},{7,8}}
{{1,2},{3,4}}  .  {5,6}
```

# Wolfram Alpha での行列の計算 II

## 行列のべき乗, 逆行列, 行列式

$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^5$

$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^{-1}$

$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

```
{{1,2},{3,4}}^5
Inverse[{{1,2},{3,4}}]
Rank[{{1,2},{3,4}}]
Det[{{1,2},{3,4}}]
```

## 行簡約階段形 ReducedRowEchelonForm

$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

```
RREF[{{1,2},{2,4}}]
```

# 基底の変換

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L30(2022-07-27 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-27 Wed 07:55 JST hig"

今日の目標

- 1 つのベクトルを, 2 組の基底でそれぞれ 1 次結合として書いたときの係数を, 互いに変換できる



## L29-Q1

### Quiz 解答:1 次独立・1 次従属

1. 1 次独立
2. 1 次従属
3. 1 次独立
4. 1 次従属
5. 1 次従属
6. 1 次従属

## L29-Q2

### Quiz 解答: 基底

1. 生成しない
2. 生成しない, 1 次従属
3. 基底
4. 生成しない, 1 次従属
5. 1 次従属
6. 1 次従属

# ここまで来たよ

29 5.3 基底と次元|第 5 章 ベクトル空間

30 基底の変換
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- 基底の変換
- ベクトル・マトリクス・テンソル

# ◆行列式の余因子展開

**定理 (3-4-1 余因子展開** 加藤 線形代数 p.125 **)**

$A = [a_{ij}]$: $n$ 次の正方行列
$\tilde{a}_{ij}$: $A$ の $(i,j)$ 余因子 のとき,

- $\forall i \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\tilde{a}_{i\ell}$. ($i$ 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\tilde{a}_{\ell j}$. ($j$ 列目における余因子展開)

$(i,j)$ 小行列式にかけられる符号=$(i,j)$ 余因子に含まれる符号 $\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$

どこかの 1 行, またはどこかの列を選んで展開する. $n$ 項の和になる.
第 3 行についての展開 ( ., • はつめて, $n-1$ 次の行列式を計算)

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = +31 \begin{vmatrix} . & 12 & 13 & 14 \\ . & 22 & 23 & 24 \\ \bullet & . & . & . \\ . & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} - 32 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & \bullet & . & . \\ 31 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 33 \begin{vmatrix} 11 & 12 & . & 14 \\ 21 & 22 & . & 24 \\ . & . & \bullet & . \\ 31 & 32 & . & 44 \end{vmatrix} - 34 \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & . \\ 21 & 22 & 23 & . \\ . & . & . & \bullet \\ 31 & 32 & 43 & . \end{vmatrix}$$

第 2 列についての展開

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} . & \bullet & . & . \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 22 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ . & \bullet & . & . \\ 31 & . & 33 & 34 \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} - 32 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ . & \bullet & . & . \\ 41 & . & 43 & 44 \end{vmatrix} + 42 \begin{vmatrix} 11 & . & 13 & 14 \\ 21 & . & 23 & 24 \\ 31 & . & 33 & 34 \\ . & \bullet & . & . \end{vmatrix}$$

# ここまで来たよ

29 5.3 基底と次元|第 5 章 ベクトル空間

30 基底の変換
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- 基底の変換
- ベクトル・マトリクス・テンソル

# ベクトルの成分と標準基底の 1 次結合

$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$.

ベクトルの成分 = 標準基底の 1 次結合で書いたときの係数

他の基底の 1 次結合の係数はどういう意味?

L30-Q1

## TA Prob and Sol: 基底の変換

$\mathbb{R}^2$ の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$,$\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ を考える. ただし,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}'_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}'_2 = 7\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2$$

である.
ベクトル $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{w} = a'_1\boldsymbol{v}'_1 + a'_2\boldsymbol{v}'_2$ と書くときの係数 $a'_1, a'_2 \in \mathbb{R}$ を求めよう.

### 略解

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = a'_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + a'_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

を $a'_i$ について解けばよい.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

と書けるので, 両辺に左から逆行列 $\left[\begin{smallmatrix}2&7\\3&5\end{smallmatrix}\right]^{-1}$ をかけて,

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\cdot 5 - 7\cdot 3} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -18 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

mobius 5.4.10
ここで現れた行列 $P = \left[\begin{smallmatrix}2&7\\3&5\end{smallmatrix}\right]$ を, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ から $\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ への基底変換行列という. 加藤 線形代数 p.230 線形代数☆演習 II(2022)L??

# 基底変換行列

この科目内では, 問題を解くのに下のことを使うのはやめておき, 上のように素直に連立方程式を解こう.

実は,

$$[\boldsymbol{v}_1' \ \boldsymbol{v}_2'] = [\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2]P$$

という関係も成立する.

$$\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{v}_1' \ \boldsymbol{v}_2'] \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2]PP^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

と書くと,

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

となったことも納得いく.

基底のベクトルを結ぶ行列と, 成分を結ぶ行列は, 互いに「逆 (行列)」

L30-Q2

## Quiz(基底の変換)

$\mathbb{R}^2$ の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$,$\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ を考える. ただし,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2,$$

である.
ベクトル $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{w} = a'_1\boldsymbol{v}'_1 + a'_2\boldsymbol{v}'_2$ と書くときの係数 $a'_1, a'_2 \in \mathbb{R}$ を求めよう.

基底の 1 次結合で書いたときの係数 = その基底で別の座標軸を定めたときのベクトルの成分

$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ 水平鉛直の座標軸
$\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ 斜面に平行垂直な座標軸

高校物理, 物理と微分方程式

L30-Q3

## Quiz(基底の変換)

$\mathbb{R}^2$ の 2 組の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$,$\{\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2\}$ を考える. ただし,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{v}'_1 = 100\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}'_2 = \frac{1}{10}\boldsymbol{v}_2$$

である.
ベクトル $\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{w} = a'_1\boldsymbol{v}'_1 + a'_2\boldsymbol{v}'_2$ と書くときの係数 $a'_i \in \mathbb{R}$ を $a_i$ で表そう.

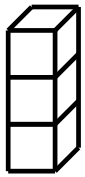
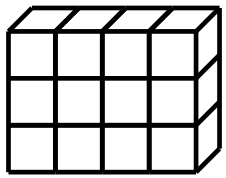
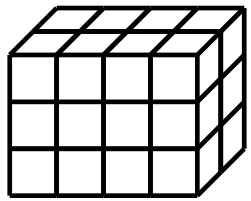
座標軸の「1 単位」が変わったので,「係数」も変わっている.
定規が cm から m,mm に変わったので, 目盛から読み取った値も変わっている.

# ここまで来たよ

29 5.3 基底と次元|第 5 章 ベクトル空間

30 基底の変換
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- 基底の変換
- ベクトル・マトリクス・テンソル

# ベクトル・行列・テンソル

| $\boldsymbol{x} = [x_i]$ 3 次元縦ベクトル | $A = [a_{ij}]$ $3 \times 4$ 行列 | $T = [T_{ijk}]$ 3 階の $3 \times 4 \times 2$ テンソル | $T = [T_{ijkh}]$ 4 階の $3 \times 4 \times 2 \times 10$ テンソル |
|---|---|---|---|
|  |  |  | ? |
| ベクトル (vector) ‘行くもの’ 例: 部屋の明暗の時間変化データ. 3=時間の長さ. | 行列 (matrix) ‘母体’ ‘土台’ ‘母型’ ‘活字’ 白黒グレースケール画像. 縦横 3x4 ドット. | テンソル (tensor) ‘張力’ RGB 画像 | 4 階のテンソル RGB 動画 |

- 工学では, matrix といえば 縦横のあるもの, のイメージの方が強くなった
- ベクトルは 1 階のテンソル, 行列は 2 階のテンソル (まあ), 3 階以上はぜんぶテンソル
- どれもプログラム上では (多次元) 配列 array で表現される.

一般相対性理論のアインシュタイン方程式

$g_{\mu\nu}$ 計量テンソル, $R_{\mu\nu}$ リッチテンソル, $T_{\mu\nu}$ エネルギー運動量テンソル

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

# 今後使われる線形代数

- 1 年後期
  - 線形代数及び演習 II より抽象的に, より広い適用範囲
  - 微積分及び演習 II 2 変数関数 $y = f(x_1, x_2)$ の偏微分 $f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, テイラー展開, 置換積分
  - データ分析 表=行列に記録された数値データの扱い
- 2 年前期
  - 数値計算法及び実習 (の一部) 行列のアルゴリズムを自分でプログラムとして書こう
- 2 年後期
  - 多変量解析及び演習 'ベクトルの確率', 'その標本である行列'
- 3 年前期
  - 機械学習 I,II ニューラルネットワークのテンソルによる表現
- 3 年後期
  - 微分幾何入門曲面の曲がり具合を表現するリーマン曲率 (4 階) テンソル $R^h_{kji}$
- 大学院入試
  - 線形代数は必須科目

# 定期試験期間に行う任意参加試験

- 2022-08-03 水 9:15-10:15, 1-107
- 定期試験ではないので, 遅延や感染による配慮や追試はありません

## 出題計画

- Trial L01–L15 の出題計画をあわせたもの
- すべて持込不可
- 成績評価方法のお知らせ (2022-06-16) に始まる Teams 一般 ch のスレッドを参照.

## 他の科目の定期試験と, この任意参加試験に共通する注意

- 学生証必須.
- スマホ使用不可 (時計としても).
- (ふだん座席指定のない科目でも) 個人別座席指定 (されていることがあります).
- 遅刻は 20 分まで.

## 他の科目の定期試験にのみ該当する注意

- ふだんと教室が違うことがあります. ポータル My 定期試験時間割で確認.
- 考慮される理由 (履修要項) で欠席した場合, 証明文書を取得して直ちに教務課に連絡. 認められれば 8 月下旬に対面追試.

樋口さぶろお　https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

# 線形代数☆演習 I　L31(2022-08-03 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-27 Wed 11:06 JST hig"

## 今日の目標

- 1 次独立/1 次従属 をイメージできる
- ベクトルの組が基底かどうか判定できる



L29-Q1

## Quiz 解答: 基底の変換

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = a'_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + a'_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

を $a'_i$ について解けばよい.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

と書けるので, 両辺に左から逆行列 $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$ をかけて,

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\cdot 5 - 7\cdot 3} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -18 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

L29-Q2

## Quiz 解答: 基底の変換

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a'_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a'_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を $a'_i$ について解けばよい.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と書けるので, 両辺に左から逆行列 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ をかけて,

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L29-Q3

## Quiz 解答: 基底の変換

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a'_1 \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} + a'_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} a_1 \\ 10 a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$