

第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列)

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L10(2022-05-13 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-05-12 Thu 21:03 JST hig"

今日の目標

- 転置行列の定義と計算が説明できる
- 正則行列の定義と計算が説明できる
- オンデマンドオンライン授業で学習できる



ここまで来たよ

- 9 第 1 章 行列の概念 (ブロック分け・上下三角行列)

- 10 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列)
 - 転置行列|3. 行列の種々の演算
 - 正則行列と逆行列|3 行列の種々の概念

◆ 転置行列 加藤 線形代数 定義 3-1(p.30)

定義 1 (転置行列)

m 行 n 列の行列 $A = [a_{ij}]$ に対して、 n 行 m 列の行列 $B = [b_{ji}]$ で

$$b_{ji} = a_{ij}$$

であるものを A の**転置行列 (transposed matrix)** といい、 tA と書く.

A の t 乗 $A^t (t = 1, 2, \dots)$ と間違えないために、左上に立体で頭文字 t とかく.

例 2 (転置行列の例)

縦ベクトルの転置は横ベクトル, 横ベクトルの転置は縦ベクトル.

$${}^t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [3 \ -1 \ 2], \quad {}^t [3 \ -1 \ 2] = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 章末問題 1,2(p.39)

例 3 (転置行列の例)

\mathbf{a}, \mathbf{b} が縦ベクトルのとき,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = {}^t \mathbf{a} \mathbf{b}$$

縦ベクトルの内積 行列の積

転置行列の性質

定理 4 (転置行列の性質)

A, B を行列, $k \in \mathbb{R}$ とするとき,

$${}^t({}^tA) = A,$$

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB,$$

$${}^t(kA) = k {}^tA, \quad \text{以上まああたり前}$$

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA. \quad \text{超重要}$$

$\iota(AB) = \iota B \iota A$ の証明
 加藤 線形代数 練習 1(p.31)

証明

型はあってる ($\iota(AB) = \iota A \iota B$ じゃあわない).

あとは成分が等しいことを言う (行列の相等 加藤 線形代数 定義 2-1(p.19)).

$$A = [a_{ik}], B = [b_{kj}], AB = [c_{ij}],$$

$$\iota A = [p_{ki}], \iota B = [q_{jk}], \iota(AB) = [r_{ji}] \text{ とすると,}$$

$$p_{ki} = a_{ik}, q_{jk} = b_{kj}, r_{ji} = c_{ij}.$$

L10-Q1

Quiz(転置の積の成分表示)

n 次の正方行列 $A = [a_{ij}]$ を考える.

- ① A^2 の (i, j) 成分を求めよう.
- ② tAA の (i, j) 成分を求めよう.
- ③ $A {}^tA$ の (i, j) 成分を求めよう.

ここまで来たよ

- 9 第 1 章 行列の概念 (ブロック分け・上下三角行列)

- 10 第 1 章 行列の概念 (転置行列・正則行列)
 - 転置行列|3. 行列の種々の演算
 - 正則行列と逆行列|3 行列の種々の概念

加藤 線形代数 p.32

n を固定したとき,
 n 次正方行列全体の集合は和, 差, 積 (\cdot , 転置) の操作のもとで「閉じている」(結果もその集合にはいる).

- $AB \neq BA$ を除けば実数全体の集合と同じ.
- 0 に相当するのが零行列 O .
- 1 に相当するのが単位行列 E .

体, 代数

◆正則行列と逆行列

加藤 線形代数 定義 3-2(p.32)

定義 5 (正則行列と逆行列)

n 次正方行列 A に対して, $XA = AX = E$ となる n 次行列が存在するとき, A を**正則行列 (non-singular matrix)** といい, X は A の**逆行列 (inverse matrix)** であるという.

 A が正則かどうか判定する方法

$n \times n$ 元連立 1 次方程式 $AX = E$ を解く. 未知数 $X = [x_{ij}]$.

- 解 X が求まったら A は正則行列である. X は逆行列.
- 解なしになったら A は正則行列でない.

⇨ 2次元の公式

正則行列である例, ない例

加藤 線形代数 例題 2(p.32)

命題 6

正則行列 A の逆行列は 1 つに定まる. それを A^{-1} とかく.

1 つに定まること (唯一性 (uniqueness)) の証明: X, Y とおいて $X = Y$ という

正則行列の性質

加藤 線形代数 定理 3-2(p.33)

定理 7 (正則行列の性質)

- ① A, B が正則行列 ならば, AB も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- ② A が正則行列 ならば, A^{-1} も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.

記法

P, Q : 命題

$P \Leftrightarrow Q$: P と Q は同値, Q は P の必要十分条件, P を Q で定義する.

$P \Rightarrow Q$: P ならば Q , P は Q の十分条件, Q は P の必要条件, P : 仮定,

Q : 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

$P \setminus Q$	真	偽
真	真	偽
偽	偽	真

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

$P \setminus Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

P ならば Q の証明: P を仮定して Q を導く

2 次の正則行列と逆行列

加藤 線形代数 (p.34)

定理 8 (2 次の正則行列と逆行列)

2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して, $\Delta = ad - bc$ とおくと,

- ① $\Delta \neq 0$ ならば A は正則行列で, 逆行列は $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
- ② $\Delta = 0$ ならば A は正則行列でなく, 逆行列は存在しない.

$\Delta \neq 0$ は, A が正則行列であるための必要十分条件

$\Delta = \det A = |A|$ などと表し, A の行列式 (determinant) という.

今後, 3 次以上の行列にも行列式が定義される

加藤 線形代数 第 4 章

行列式は行列でない. 行列式は 1 個の実数.

加藤 線形代数 例題 4(p.36)

逆行列の性質

加藤 線形代数 定理 3-3(p.36)

定理 9 (正則行列の性質)

A, B を n 次の正則行列とする (逆行列はある).

- ① $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. (定義そのもの)
- ② $AB = E$ ならば, $B = A^{-1}, A = B^{-1}$ (意味: 片側のチェックでいい)
- ③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (再掲)
- ④ $(A^{-1})^{-1} = A$ (再掲)
- ⑤ $k \neq 0$ のとき, $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ (わかる)

加藤 線形代数 練習 7(p.36)

$AB = E$ ならば, $B = A^{-1}, A = B^{-1}$ の証明

加藤 線形代数 練習 5(p.36)

ブロック分けされた行列の逆行列 加藤 線形代数 なし

ブロック分けされた正方行列

$$A = \begin{bmatrix} D & O \\ O & H \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} J & O \\ O & M \end{bmatrix},$$

で D, J が同じ次数の正方行列, H, M が同じ次数の正方行列 だと積が考えられ,

$$AB = \begin{bmatrix} DJ & O \\ O & HM \end{bmatrix}$$

なのだった. 加藤 線形代数 例 10(p.28)

ブロック対角行列の逆行列

正方行列 $A = \begin{bmatrix} D & O \\ O & H \end{bmatrix}$ で, D, H が正則行列のとき, A も正則行列で, 逆行列は

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & H^{-1} \end{bmatrix}.$$