

4.4 行列式の展開

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L24(2022-07-01 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2022-07-01 Fri 11:23 JST hig"

今日の目標

- 行列式を, 余因子展開で計算できる
- 逆行列の公式を説明できる



ここまで来たよ

23 4.4 行列式の計算

24 4.4 行列式の展開

- ◆余因子|4. 行列式の展開
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- ◆余因子行列|4. 行列式の展開

◆余因子

今日の動機

- 第1行や第1列と限らず、ゼロ成分が多い行や列があったときに還元定理 加藤 線形代数 定理 3-1(p.119) 的な操作をしたい
- これに該当しないときも、強引に行列式の次数を reduce したい
 - ▶ 基本変形 (の前半) 加藤 線形代数 例題 1(p.123) はひとつの方法

加藤 線形代数 p.124加藤 線形代数 定義 4-1(p.125)

定義 1 (小行列式と余因子)

A : n 次の正方行列 のとき,

A の (i, j) **小行列式 (minor)** $m_{ij} \in \mathbb{R}$ を, A から第 i 行, 第 j 列を取り除いた $(n-1)$ 次の正方行列の行列式と定義する.

A の (i, j) **余因子 (adjugate)** $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \in \mathbb{R}$ と定義する.

小行列 (submatrix) は, 1 行 1 列とは限らず複数の行と列を取り除いて得られる行列をさす言葉. 部分行列?

$$\text{例 } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

$$\begin{matrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{matrix} = \quad , \quad \begin{matrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{matrix} = \quad .$$

加藤 線形代数 例 1, 練習 1(p.124), 例 2, 練習 2(p.125) mobius 4.4.10

ここまで来たよ

23 4.4 行列式の計算

24 4.4 行列式の展開

- ◆余因子|4. 行列式の展開
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- ◆余因子行列|4. 行列式の展開

◆行列式の余因子展開

展開 (expansion) 1 個の複雑なものを, 単純なものの複数の和として書くこと

加藤 線形代数 定理 4-1(p.125)

定理 2 (余因子展開)

$A = [a_{ij}]$: n 次の正方行列

\tilde{a}_{ij} : A の (i, j) 余因子 のとき,

- $\forall i \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \tilde{a}_{i\ell}$. (i 行目における余因子展開)
- $\forall j \quad \det(A) = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j} \tilde{a}_{\ell j}$. (j 列目における余因子展開)

証明 i 行目に行多重線形性を適用する. 交代性を使って, $a_{i\ell}$ を $(1, 1)$ に持っていく. この時出る符号は $(-1)^{i-1+\ell-1}$. 還元定理を使う.

加藤 線形代数 例 3, 例題 1(p.127), 練習 4(p.128)

mobius 4.4.30 mobius 4.4.50

証明の実演 $i = 2$ 行目についての余因子展開. 右側切れてます.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ a & b & c & d \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\text{多重線形性}}{=} \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\text{交代性}}{=} (-1)^{i-1} \times \left(\det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \right)$$

$$\stackrel{\text{交代性}}{=} (-1)^{i-1} \times \left((-1)^0 \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + (-1)^1 \det \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 13 & 14 \\ 32 & 31 & 33 & 34 \\ 42 & 41 & 43 & 44 \end{bmatrix} + \dots \right)$$

$$\stackrel{\text{還元定理}}{=} (-1)^{i-1} \times \left(a \det \begin{bmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 32 & 33 & 34 \\ 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} + (-1)^1 b \det \begin{bmatrix} 11 & 13 & 14 \\ 31 & 33 & 34 \\ 41 & 43 & 44 \end{bmatrix} + (-1)^2 c \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 14 \\ 31 & 32 & 34 \\ 41 & 42 & 44 \end{bmatrix} + (-1)^3 d \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 31 & 32 & 33 \\ 41 & 42 & 43 \end{bmatrix} \right)$$

$$\stackrel{\text{小行列式の定義}}{=} (-1)^{i+1} a m_{i1} + (-1)^{i+2} b m_{i2} + (-1)^{i+3} c m_{i3} + (-1)^{i+3} d m_{i4}$$

$$\stackrel{\text{余因子の定義}}{=} a \tilde{a}_{i1} + b \tilde{a}_{i2} + c \tilde{a}_{i3} + d \tilde{a}_{i4}$$

$$= a_{i1} \tilde{a}_{i1} + a_{i2} \tilde{a}_{i2} + a_{i3} \tilde{a}_{i3} + a_{i4} \tilde{a}_{i4}.$$

行列式の余因子展開 (一般形)

加藤 線形代数 定理 4-2(p.128)

定理 3 (余因子展開 (一般形))

$A = [a_{ij}]$: n 次の正方行列

\tilde{a}_{ij} : A の (i, j) 余因子

- $\forall i, k \quad \det(A)\delta_{ik} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}$. (i 行目における余因子展開)
- $\forall j, k \quad \det(A)\delta_{kj} = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell j}\tilde{a}_{k\ell}$. (j 列目における余因子展開)

証明 $i = k$ で $\delta_{ik} = 1$ となるケースは上で証明した. $i \neq k$ の場合を示す.

A で, k 行目に, i 行目を上書きコピーした行列を B とする.

交代性より $0 = \det B$.

$\det B$ の k 行目に関する余因子展開は $\det B = \sum_{\ell=1}^n b_{k\ell}\tilde{b}_{k\ell}$.

右辺で, コピーの結果 $b_{k\ell} = a_{i\ell}$,

余因子 $\tilde{b}_{k\ell}$ はコピーされた部分はずしてるので, $\tilde{b}_{k\ell} = \tilde{a}_{k\ell}$.

$0 = \det B = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell}\tilde{a}_{k\ell}$.

$i \neq k$ の場合の証明の実演

A の $i = 4$ 行を $k = 2$ 行にコピーして B を作成.
 B を $k = 2$ 行で展開.

$$\begin{aligned}
 A = [a_{ij}] &= \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \\
 0 = \det B &= \det \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix} \\
 &= 41\tilde{a}_{21} + 42\tilde{a}_{22} + 43\tilde{a}_{23} + 44\tilde{a}_{24} \\
 &= a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + a_{i3}\tilde{a}_{k3} + a_{i4}\tilde{a}_{k4}.
 \end{aligned}$$

ここまで来たよ

23 4.4 行列式の計算

24 4.4 行列式の展開

- ◆余因子|4. 行列式の展開
- ◆行列式の余因子展開|4. 行列式の展開
- ◆余因子行列|4. 行列式の展開

余因子行列

動機 $\tilde{a}_{k\ell}$ じゃなくて $\tilde{a}_{\ell k}$ だったら行列の積の形になるのに…

加藤 線形代数 p.129

定義 4 (余因子行列)

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列, その余因子 \tilde{a}_{ij} のとき
 A の余因子行列 $\tilde{A} = [b_{ij}]$ を, $b_{ij} = \tilde{a}_{ji}$ である n 次正方行列と定義する.

余因子を素直に行列状に並べた後**転置**したもの.

例

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}.$$

加藤 線形代数 定理 4-3(p.129)

定理 5 (余因子展開 (行列形))

$A = [a_{ij}]$: n 次の正方行列,
 \tilde{A} : A の余因子行列 のとき,

$$\det(A) \times E = A\tilde{A} = \tilde{A}A$$

証明 加藤 線形代数 定理 4-2(p.128) の和を, 行列の積とみただけ

加藤 線形代数 定理 4-3(p.129) の系 加藤 線形代数 系 4-1(p.129)

定理 6 (逆行列の明示公式)

A : n 次の正則行列,
 \tilde{A} : A の余因子行列 のとき,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}.$$

計算問題には使わないこと.

例 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^{-1} =$

加藤 線形代数 定理 4-4(p.130)

定理 7 (正則行列の特徴づけ)

A : n 次の正方行列 のとき
次は同値

- (a) A は正則
- (b) $\text{rank } A = n$ 「フルランク」
- (c) $\det(A) \neq 0$

● 証明済

- ▶ (a) \Leftrightarrow (b) 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)
- ▶ (a) \Rightarrow (c) 加藤 線形代数系 2-2(p.118)

● ここで証明

- ▶ (c) \Rightarrow (a) 加藤 線形代数 定理 4-3(p.129) より, $\det(A) \neq 0$ なら A^{-1} が存在する。