平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L04(2023-04-21 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-04-21 Fri 11:26 JST hig"

今日の目標

- 直線のパラメタ表示を説明できる
- 法線ベクトルを用いた直線の方程式が説明できる

L03-Q1
Quiz 解答: 内積・外積・スカラー 3 重積

1. $\cos\theta = -1/\sqrt{2}$. $\theta = \frac{3}{4}\pi$. $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$. $\sqrt{5}\sqrt{10}(1/\sqrt{2}) = 5$.
2. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$. $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = 5$.
3. $5 \times 3 = 15$.
4. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 15$.

L03-Q2
Quiz 解答: スカラー 3 重積

1. $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} +2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. 面積は, $|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$.
2. $\pm\frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.
3. スカラー 3 重積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} +2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = -2$
   よって体積はその絶対値 $|-2| = 2$.

4. スカラー 3 重積の値が負だから, 左手.

L03-Q3

Quiz 解答: ベクトルとスカラーの演算

1. へん
2. スカラー
3. ベクトル
4. スカラー
5. ベクトル

L03-Q5

Quiz 解答:3 次元ベクトルの外積・スカラー 3 重積　親人中の順に並べたスカラー 3 重積 $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-1\\-2\\3\end{bmatrix}\right)=-32<0$ より左手.

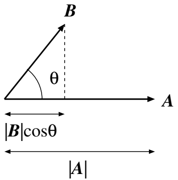
ここまで来たよ

3. ベクトルのスカラー 3 重積
   - 内積・外積・スカラー 3 重積の応用
4. 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式
   - 直線のパラメタ表示と方程式

内積の直観的意味

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boxed{\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ の相乗効果, 協力したときのパワー}}$ みたいなもの

- $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ それぞれの絶対値が大きいと, 内積の絶対値も大きい
- $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ の向きが
  - 近いほど正で大きい. $\cos 0 = 1$
  - 反対だと負. $\cos \pi = -1$
  - 直交してると零. $\cos \frac{\pi}{2} = -1$. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
- 仕事 (スカラー) は, 力 (ベクトル) と変位 (ベクトル) の内積.
- $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{b} \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ は, $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ へのスカラー射影
- $(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}_{\mathrm{a}})\boldsymbol{u}_{\mathrm{a}} = \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ は, $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影ベクトル



L04-Q1

Quiz(ベクトルの射影)

ある座標系では，ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$ が北向き，
ベクトル $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ が西向きである.
あるペンギンが, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ から, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ まで歩いた.
このペンギンは，東向きにはどれだけ歩いたことになるか．正または負の実数で答えよう.

ここまで来たよ

3 ベクトルのスカラー 3 重積
- 内積・外積・スカラー 3 重積の応用

4 平面上の直線のパラメタ表示・ベクトル方程式
- 直線のパラメタ表示と方程式

平面内の直線のパラメタ表示

$\boldsymbol{c}$ を通り $\boldsymbol{a}(\neq \boldsymbol{0})$ に平行な直線のパラメタ表示

加藤 線形代数 p.183

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}t$$

すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$　　$(t \in \mathbb{R}$はパラメタ$)$

$\boldsymbol{a}$ を直線の接 (線) ベクトルという.

理由

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{a}$ に平行である

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ として成分で書くと,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

GeoGebra(動的幾何ソフトウェア,Web アプリ)

平面内の直線のパラメタ表示

`https://www.geogebra.org/m/skj88vSN`

パラメタ表示とは

$$\text{直線上の点の集合} = \{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2 | t \in \mathbb{R}\}$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ を固定して, t を実数全体を動かしたとき, $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ は直線全体を動く.
このとき, $\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ を直線のパラメタ (媒介変数) 表示, t をパラメタ (媒介変数) という.
$\mathbb{R}$ 実数全体, $\mathbb{R}^2$ 2 次元ベクトル全体=平面

1 つの直線には複数の媒介変数表示がある.
例: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$ はすべて同じ直線を表す.

L04-Q2

Quiz(直線のパラメタ表示)

ベクトル $\boldsymbol{p} = \left[\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix}\right]$ に平行で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \left[\begin{smallmatrix}5\\7\end{smallmatrix}\right]$ を通る直線を考える.
直線のパラメタ表示を何個か作ろう（ベクトルで）.

点が，パラメタ表示された直線上にあるかどうかの判定

点 $\boldsymbol{x}_0$ と，パラメタ表示された直線 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ を考える．
$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{c}$ となる t がひとつでも存在すれば，この t についての方程式に解 t が存在すれば，$\boldsymbol{x}_0$ は直線上にある．

L04-Q3

Quiz(直線のパラメタ表示)

次のパラメタ表示を持つ平面上の直線を考える.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

点 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 29 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 18 \end{bmatrix}$ はそれぞれ直線上にあるか，判定しよう.

mobius　L04.1

平面上の直線のベクトル方程式

$\boldsymbol{c}$ を通り $\boldsymbol{n}(\neq \boldsymbol{0})$ と垂直な直線のベクトル方程式

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

$\boldsymbol{n}$ を法 (線) ベクトルという.

理由

- チェック 1 $\boldsymbol{c}$ を通る
- チェック 2 $\boldsymbol{n}$ に垂直である

$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{n} = C$ (実数の定数) とおくと,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} - C = 0 \qquad (C\text{は定数})$$

とも書ける. $\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right], \boldsymbol{n} = \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$ として成分で書くと,

$$ax + by - C = 0.$$

https://www.geogebra.org/m/bxNHWG6P

(ベクトル) 方程式とは

$$\text{直線上の点の集合} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | f(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

となるような (条件) 式 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ のこと.

直線には, 同値な複数の方程式の形がある.
例: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} - C = 0$, $(\boldsymbol{x} \cdot (2\boldsymbol{n}) - 2C = 0$, $(\boldsymbol{x} \cdot (-\boldsymbol{n}) - C = 0$ はすべて同じ直線を表す.

L04-Q4

Quiz(直線のパラメタ表示)

ベクトル $\boldsymbol{p} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ に垂直で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]$ を通る直線を考える.
直線の方程式を求めよう.

mobius　L04.1

点が, 方程式で表された直線上にあるかどうかの判定

点 $\boldsymbol{x}_0$ と, 方程式 $f(\boldsymbol{x}) = 0$ を考える.
$f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ が成立すれば $\boldsymbol{x}_0$ は直線上にある.

L04-Q5

Quiz(直線の方程式と点)

次の平面上の直線の方程式を考える．

$$2x + 3y - 19 = 0.$$

点 $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}\right]$ はそれぞれ直線上にあるか，判定しよう．

直線を境界とする半平面の式

直線は平面を 2 つの半平面に分割する．各半平面は不等式で指定される．

$$\boldsymbol{n} \text{ と同じ側} \qquad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} > 0$$

$$\boldsymbol{n} \text{ と逆の側} \qquad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{n} < 0$$

mobius　L04.2

パラメタ表示から機械的に方程式を求める
パラメタ t を消去する.
方程式から機械的にパラメタ表示を求める
いつでもうまくいく方法はない⋯
平面上の直線の場合はこの方法で.
x 座標を t とおいて y 座標を t で表す. $f(t)$ となったとする.

$$\left[\begin{smallmatrix} t \\ f(t) \end{smallmatrix}\right] (t \in \mathbb{R})$$

が直線のパラメタ表示.
意味や図を考える方法
どちらで与えられるにせよ, いったん図を描き, その直線のパラメタ表示や方程式を考える.
直線の場合, 接線ベクトル $\boldsymbol{a} = \left[\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right]$ から, それに直交する法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \left[\begin{smallmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{smallmatrix}\right]$ と求める方法 (およびその逆) がある.

L04-Q6

Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

1. 次のようにパラメタ表示される直線の方程式を求めよう.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. 次の方程式で表される直線のパラメタ表示を作ろう.

$$5x - 2y - 10 = 0$$

L04-Q7

Quiz(直線のパラメタ表示と方程式)

1. ベクトル $\boldsymbol{p} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ に平行で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]$ を通る直線のパラメタ表示と方程式を求めよう.
2. ベクトル $\boldsymbol{q} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ に垂直で, 点 $\boldsymbol{r}_0 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 13 \end{smallmatrix}\right]$ を通る直線のパラメタ表示と方程式を求めよう.