写像・変換・1 次変換|0 章平面と 1 次変換

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L06(2023-04-28 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-05-09 Tue 10:01 JST hig"

今日の目標

- 2×2 行列と 2×1 行列 (ベクトル) の積が計算できる
  加藤 線形代数 p.7
- 1 次変換から行列, 行列から 1 次変換を求められる
  加藤 線形代数 例題 2,3(pp.9,10)

L05-Q1

Quiz 解答: 平面のパラメタ表示とベクトル方程式

1. パラメタ表示は

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t, s \text{はパラメタ})$$

2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトル $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は平面の法線ベクトルのひとつ. よって, 方程式は,

$$\left(\boldsymbol{x} - \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

すなわち

$$x - 13 = 0.$$

3. 略

4. 方程式を満たしているかどうかチェックして, $\begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ は平面上にある. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ は平面上にない.

L05-Q2

Quiz 解答: 平面の方程式

1. $\frac{1}{\sqrt{14}}(3x + y - 2z) = C$ とおく. $\boldsymbol{r}_0$ を通ることから, $\sqrt{14}C = 3 \cdot 1$ よって, $3x + y - 2z = 3$.
2. $0x + 0y + 1z = C$ とおく. $\boldsymbol{r}_0$ を通ることから, $C = -4$ よって, $z = -4$.

L05-Q3

Quiz 解答: 半平面のパラメタ表示

1. 法線ベクトルのひとつは $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. よって, 方程式は,
$$x - 2y + 2 = 0$$
.
2. これらの座標を左辺に代入した結果は, それぞれ, 正, 負, 負, 0.
よって,
法線ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ は y 軸の負の向き (下向き) なので, それと同じかどうかを考えて, それぞれ, 下側, 上側, 上側, 直線上.

ここまで来たよ

5 空間内の直線・平面のパラメタ表示・ベクトル方程式

6 写像・変換・1 次変換|0 章平面と 1 次変換
- 1. 写像と変換
- 2. 1 次変換と行列
- 3. いろいろな 1 次変換 (途中まで)

◇写像 加藤 線形代数 §0.1

定義 (写像)

2 つの集合 (set) X, Y において，X のどの要素 (element, 元ともいう) にも，Y の要素が 1 つずつ対応しているとき，この対応 (規則) を X から Y への写像 (map, mapping) という．加藤 線形代数 p.6,p.12,p.191

写像の記号

$$f : X \to Y$$

$$\text{写像名 : 定義域 (集合)} \to \text{終域 (集合)}$$

$$f : a \mapsto b$$

$$\text{写像名 : 要素, 元} \mapsto \text{像}$$

$f(a) = b$ ともかく．b を「f による a の像 (image)」という

写像の例

X=実数全体または部分集合, Y=実数全体のとき, 写像は, 以前から知っている関数 (function).

例 (実数から実数への写像=関数)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^2$ 　高校なら関数 $f(x) = x^2$ と書くところ.

例 (実数の部分集合から実数全体への写像)

$f : \{x | x > 0, x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \log x$ 　高校なら関数 $f(x) = \log x$ と書くところ.

写像は, 一般の集合で考えられる.

定義 (集合)

$\mathbb{R}$ =(実数の全体の集合)
$\mathbb{R}^2 = \{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] | x, y \in \mathbb{R}\}$: 2 次元実数ベクトルの集合=平面 E.

集合={元の形|元の満たす条件}.

例 (直線のパラメタ表示は写像)

平面内の場合 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
(空間内なら $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)
$f : t \mapsto \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$
同様に使う書き方: $f(t) = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$, $\boldsymbol{x}(t) = \left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right] t + \left[\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right]$

例

空間内の平面のベクトル方程式の左辺は $\boxed{}$ から $\boxed{}$ への写像

例

空間内の平面のパラメタ表示は $\boxed{}$ から $\boxed{}$ への写像

◇変換

定義 (変換)

集合 X から X 自身への写像を X の変換 (transformation) という.

写像で，$Y = X$ のケースということ.

例 (実数の変換)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \mathrm{e}^x$

(実数全体で定義された) 関数は実数の変換

例 (変換でない例)

$$f : \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} \to \mathbb{R}$$
$$f : x \mapsto -|\log x|$$

例 ($\mathbb{R}^2$ の変換)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f : \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{smallmatrix} x \\ -y \end{smallmatrix}\right]$

ここまで来たよ

◇1 次変換 加藤 線形代数 p.7

定義 (1 次変換, 線形変換)

$\mathbb{R}^2$ の変換で,

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

の形のものを (2 次元の)1 次変換, 線形変換 (linear transformation) という.

教科書修正 加藤 線形代数 p.7

誤 これらの点の座標の間には以下の関係式が成り立つ. (式) この場合...)

正 これらの点の座標の間に以下の関係式 (式) が成り立つ場合...)

教科書の間違い探し

末尾の奥付の, 版と年月日を確認しよう.
出版社や著者のサイトに正誤表がないか確認しよう
https://www.chart.co.jp/goods/item/contents/43168.html

定義 (行列 (1 次変換の記号))

$$f: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

はすべて同じ意味.
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を行列 (matrix) という.

行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ と行列 (ベクトル) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の積は行列 (ベクトル) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ に等しい, と読む.

例題

行列 A と $\boldsymbol{x}$ から像 $A\boldsymbol{x}$

加藤 線形代数 例題 2(p.9), mobius K0.2.10, チーム課題 1

$\boldsymbol{x}$ と像 $A\boldsymbol{x}$ から行列 A

加藤 線形代数 例題 1, 加藤 線形代数 例題 3(p.10), mobius K0.2.10, チーム課題 2

mobuis での行列入力

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ = <x,y>

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ = < <a,c>|<b,d> > (or < <a|b>,<c|d> >)

縦ベクトルを横にならべたイメージ. mobius L00.03

Trial L06 出題計画 mobius K0.2.10

ここまで来たよ

対称変換 加藤 線形代数 例 1(p.7)

例 (対称変換)

- x 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- y 軸に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 直線 $y = x$ に関する対称変換 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- 原点に関する対称変換 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

相似変換と恒等変換

加藤 線形代数 例 1(p.8)

例 (相似変換)

- 相似比 k の相似変換 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = kE$
- 恒等変換 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

回転と 1 次変換 加藤 線形代数 (p.13)

例 (回転変換)

- 一般角 θ だけ回転した回転変換 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$