和の記号・行列のブロック分け・トレース｜第 1 章 行列の概念

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L10(2023-05-19 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-05-19 Fri 19:28 JST hig"

今日の目標

- $\sum$ と添字で成分の計算ができる
- 行列のトレースを計算できる
- 行列をブロック分けして計算できる

ここまで来たよ

行列の成分表示と $\sum$ の演算 加藤 線形代数 pp.17,24

$A = [a_{ij}]$:「行列 A の成分として a, 行の添字として i, 列の添字として j を使うよ」
$AB = [c_{ik}]$「積 AB の成分を c_{ik} と書くよ」
これを濫用 (?) して, 行列の和を $[a_{ij}] + [b_{ij}]$ と書いたりする.

$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$「「行列の和」の成分は, 成分の和である」

$k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$ 「行列のスカラー倍」の成分, は成分のスカラー倍

和の記号 $\sum$ の意味を再確認

i	1	2	3	4	5
a	2	3	5	7	11
b	111	107	105	103	102

$a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$
$b_1 = 111$, $b_2 = 107$,$b_3 = 105$, $b_4 = 103$, $b_5 = 102$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i = 3+5+7 = \sum_{j=2}^{4} a_j,$$

$$\sum_{i=2}^{4} 2^{a_i} = 2^3 + 2^5 + 2^7,$$

$$\sum_{i=0}^{2} a_{i+2} = 3+5+7,$$

$$\sum_{k=3}^{5} b_k = 105+103+102,$$

$$\sum_{i=p}^{q} g(a_i) = g(a_p) + g(a_{p+1}) + \cdots + g(a_q).$$

$$\sum_{i=0}^{2} b_{5-i} = 102+103+105,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_i = 3\cdot 107 + 5\cdot 105 + 11\cdot 103,$$

$$i=2, \sum_{j=2}^{4} a_i b_j = 3\cdot 107 + 3\cdot 105 + 3\cdot 103,$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i b_{6-i} = 3\cdot 103 + 5\cdot 105 + 11\cdot 107,$$

$$\vdots$$

mobius K1.1.30

行列の積の復習

定義 (行列の積 加藤 線形代数 定義 2-5)

- 行列 A ($\ell \times m$ 型, 成分 a_{ij} $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq m)$)
- 行列 B ($m' \times n$ 型, 成分 b_{ij} $(1 \leq i \leq m', 1 \leq j \leq n)$)

に対して, $m = m'$ のとき (だけ), 行列 A, B の積 AB が定義され,

- 行列 $C = AB$ ($\ell \times n$ 型, 成分 c_{ij} $(1 \leq \ell, 1 \leq j \leq n)$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{im} b_{mj}.$$

行列の積の結合則 $((AB)C = A(BC))$ の証明

型	$\ell \times m$	$m \times n$	$n \times p$	$\ell \times n$	$\ell \times p$	$\ell \times p$
行列	$A = [a_{ij}]$	$B = [b_{jk}]$	$C = [c_{kq}]$	$AB = [d_{ik}]$	$(AB)C = [f_{iq}]$	$A(BC) = [g_{iq}]$

$(AB)C$, $A(BC)$ のすべての成分が等しければ等しい.

$$
\begin{aligned}
f_{iq} &= \sum_{k=1}^{n} d_{ik} c_{kq} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kq} \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kq} \right) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} c_{kq} \right) = g_{iq}.
\end{aligned}
$$

(1) 分配法則 $(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{13}=a_{11}b_{11}c_{13}+a_{12}b_{21}c_{13}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}g(k,j)\right)$ って, 結局 $n\times m$ 個に長方形状に並んだ $g(k,j)$ を全部加えろってこと.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}g(k,j)\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}g(k,j)\right)$$

順序に意味ないから, $\displaystyle\sum_{1\le j\le m,1\le k\le n}$ みたいに書いちゃうこともある.

ここまで来たよ

9 行列の型と和・差・スカラー倍・積|1 章 行列の概念

10 和の記号・行列のブロック分け・トレース | 第 1 章 行列の概念
- 和の記号 | 2. 行列の演算
- 行列のトレース
- ◆行列の区分け (ブロック分け)| 2 行列の演算

行列のトレース

定義 (トレース 加藤 線形代数 章末問題 1.6(p.39))

$A = [a_{ij}]$: n 次正方行列に対して, 次の対角成分 a_{ii} の和をトレース (trace) という.

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

:= 左辺の新しい記号, 用語を右辺で定義する, という記号. $\equiv$, $\triangleq$ など.

命題 (トレースの性質 加藤 線形代数 章末問題 1.6(p.39))

A, B: n 次正方行列

1. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
2. c: 実数に対して, $\mathrm{tr}(cA) = c\mathrm{tr}(A)$.
3. 延期
4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ の証明

ここまで来たよ

対角成分以外はゼロの行列 (対角行列) の積は楽

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

じゃあこの「ブロック対角行列」は?

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} = ?$$

実は

$$\begin{bmatrix} D & O \\ O & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & O \\ O & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DJ & O \\ O & HM \end{bmatrix}$$

O は 2 次のゼロ行列，D, H, J, M は 2 次の正方行列, AJ,HM は行列の積で，その中をさらに計算する.
ブロック分け=行列を 2 階層で考える.

◆行列の区分け (ブロック分け) 加藤 線形代数 p.27

加藤 線形代数 p.27 の解読

n 行 m 列の行列 $A = [a_{ij}]$ を, 縦横に格子状に分割する. 例えば 2×2.

$$A = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

D, F, G, H は行列. 正方でなくても, 同サイズでなくてもいい. 加藤 線形代数 では $D = A_{11}$ のように書いてあるけど, これは行列 (A の小行列 (submatrix)). 11 は行列につけた番号. $D = A_{11} = [d_{ab}]$.

$$AB = \begin{bmatrix} D & F \\ G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & K \\ L & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & P \\ Q & R \end{bmatrix} = C$$

とする. ここで, B の列の分割 (J, L の境い目) は, D, F の境い目と一致している必要がある.

N, Q の境い目は D, G の境い目, N, P の境い目は J, K の境い目と一致する (行列の型のルールに似てる)

行列の積を 2 段階に分けて，ブロックごとに計算できる

$N = DJ + FL$ 行列の積っぽいルール．行列の積と和．順序に意味あり

$DJ = [s_{tv}]$とすると$s_{tu} = \sum_{u} d_{tu} j_{uv}$ 行列の積．成分で書いた

証明 成分で書いてみるとと両辺同じ

加藤 線形代数 例 10(p.28)

加藤 線形代数 練習 7(p.29) 加藤 線形代数 練習 8(p.29) ブロック対角のとき，ブロック分けで積を考えると楽，という例．

mobius K1.2.50

◆行列の区分け (列ベクトルへの分割) 加藤 線形代数 p.29

ブロック分けの小行列として, 列ベクトルを選んだ場合の一例 3 次の正方行列 C, $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}$(注: この 1,2,3 は成分でなく, 1,2,3 番目のベクトルという意味), 縦ベクトル $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$ (この 1,2,3 は成分の番号)

加藤 線形代数 p.29 $A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\boldsymbol{x}_1 & v_2\boldsymbol{x}_2 & v_3\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}$.

$$\text{また,}\quad CA = C[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3] = [C\boldsymbol{x}_1\ C\boldsymbol{x}_2\ C\boldsymbol{x}_3].$$

ブロック分けの小行列として, 行ベクトルを選んだ場合の一例

3 次の正方行列 B を 3 つの行ベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ に分割して $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{bmatrix}$ と書くと,

$$D = BA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_2\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{y}_3\boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix}.$$

すなわち, $D = [d_{ij}]$ とすると, $d_{ij} = \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{x}_j$.

mobius K1.2.50

◆上三角行列, 下三角行列, 対角行列 | 3. 行列の種々の概念

定義 (上三角行列, 下三角行列, 対角行列 加藤 線形代数 p.37)

$A=[a_{ij}]$: n 次正方行列に対して ($\leftarrow$ 成分は a で書くという意味)

- A が上三角行列 (upper triangular matrix) $\Leftrightarrow (i>j \Rightarrow a_{ij}=0)$
- A が下三角行列 (lower triangular matrix)$\Leftrightarrow (i<j \Rightarrow a_{ij}=0)$
- A が対角行列 (diagonal matrix) $\Leftrightarrow (i\neq j \Rightarrow a_{ij}=0)$

$P \Leftrightarrow Q$: P と Q は同値, Q は P の必要十分条件, P を Q で定義する.
$P \Rightarrow Q$: P ならば Q, P は Q の十分条件, Q は P の必要条件, P: 仮定, Q: 結論

$P \Leftrightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	偽	真

$P \Rightarrow Q$ の真偽表

$P\backslash Q$	真	偽
真	真	偽
偽	真	真

オンライン (オンデマンド) 授業 L11(2023-05-24 水 1)

授業内容の特性から，また，今後必要になるかもしれないオンライン授業の練習として，2023-05-24 水 1 の授業は，龍大標準方式のオンライン (オンデマンド) で行います．

日時 2023-05-~~22 月 1~~23 火 1 公開．2023-05-26 金 09:15 までに動画を視聴して課題 (mobius) を提出してください．水 1 には限定されません．

場所 オンライン (オンデマンド) は，大学（発話は必要ないので，図書館やスチューデントコモンズや，空き教室）で参加しても自宅で参加してもかまいません．

方法 manaba のコースニュースを見て，manaba のコンテンツで学習を進めてください．

準備 manaba の線形代数コースのコンテンツに「参加方法」を載せています．事前に学習方法の練習をしておいてください．

1. 2023-05-24 水の Trial L10 はオンライン，2023-05-26 金の Trial L11 は紙 (ふだん通り).