証明 連立 1 次方程式と行列 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L14(2023-06-02 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-06-02 Fri 18:32 JST hig"

今日の目標

- 上下三角, 対角, 対称行列の定義を使った証明ができる
- 連立 1 次方程式の係数行列と拡大係数行列を取り出せる

L13-Q1
Quiz 解答: 行列の積和逆スカラー倍

1. $3ABA + AB^2A + \frac{1}{2}A^{-1}B^{-1}A + \frac{1}{2}E.$
2. $BAB^{-1} + B^2 + B^{-1} + \frac{1}{4}A^{-1}B^{-1}.$

L13-Q2
Quiz 解答:3 次元の回転

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

L13-Q3
Quiz 解答: 対角行列の積

$AB = [c_{ij}]$ とする.

1.

$$
\begin{aligned}
c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ii}\delta_{ik} b_{kk}\delta_{kj}
\end{aligned}
$$

$\sum_k \delta_{ik}\bullet$ を実行して $k = i$ を代入することで,

$$
c_{ij} = a_{ii} b_{ii} \delta_{ij}.
$$

よって, AB は $a_{11}b_{11}, \dots, a_{nn}b_{nn}$ を対角成分とする対角行列.

2. 対角成分は, $(a_{11})^m, (a_{22})^m, \dots, (a_{nn})^m$. (厳密には数学的帰納法で)

ここまで来たよ

13 対角行列・証明 | 第 1 章 行列の概念
- 証明の書き方と反例の見つけ方

14 証明 連立 1 次方程式と行列 | 第 2 章 連立 1 次方程式
- 1. 連立 1 次方程式と行列

証明の書き方

仮定 $\Rightarrow$ 結論

仮定 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論	仮定 よって「仮定を定義で書き直したもの」 **(ギャップを埋める)** 「結論を定義で書き直したもの」 よって, 結論

反/対称行列

A が対称行列であり，かつ反対称行列ならば，A は零行列であることを示そう．

P ならば R, $P \Rightarrow R$ の証明

P とする

$\vdots$

$\boxed{R}$

よって $P \Rightarrow R$.

P ならば (Q ならば R), $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ の証明

P とする

$\vdots$

> Q とする
>
> $\vdots$
>
> R
>
> よって $Q \Rightarrow R$

よって $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ を示すには, (PかつQ) $\Rightarrow R$ を示せばいい.
「仮定 Q は前に持っていっていい」

L14-Q1

Quiz(行列の積和逆スカラー倍)

単位行列は上三角行列であることを示そう.

反対称行列

反対称行列の対角成分は零であることを示そう.

$=A$ が反対称行列ならば, A の対角成分は零であることを示そう.

構成した者勝ちの証明の書き方

対角行列の逆行列

対角成分が零でない対角行列 $D = [d_{ij}], d_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ の逆行列を求めよう.

- やまかんで (または下心を隠して) 構成して, 定義を満たすことをいう

反例のみつけかた

対角行列と正則行列

対角行列は正則行列か? そうなら証明し, 違うなら反例を挙げよう.

$= A$ が対角行列なら A は正則行列か？

アドバイス

- 反例（対角行列であり，かつ正則行列でない A) は 1 個でもあればいい
- 例で考えよう
- 低い次元で考えよう (反例なら 1 個あれば OK, 証明ならそこから一般の次元に).

L14-Q2

Quiz(三角行列対角行列の和)

1. A, B が n 次の上三角行列ならば, 和 $A+B$ も n 次の上三角行列であることを示そう
2. A, B が n 次の下三角行列ならば, 和 $A+B$ も n 次の下三角行列であることを示そう
3. A, B が n 次の対角行列ならば, 和 $A+B$ も n 次の対角行列であることを示そう.

スカラー倍, 差も同様.

加藤 線形代数 章末問題 1-5

ここまで来たよ

◆連立 1 次方程式の書き方 加藤 線形代数 p.41

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad \cdots + a_{1n}x_n &= \quad b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad \cdots + a_{mn}x_n &= \quad b_m \end{aligned}$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\text{係数行列} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

$$\text{未知数ベクトル}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{定数項ベクトル}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$\text{拡大係数行列}\tilde{A} = \left[\, A | \, \boldsymbol{b} \right].$$

◆連立 1 次方程式を解く 加藤 線形代数 p.43

- 「系統的な」解法 (=拡大係数行列を入力, 解を出力とするアルゴリズム) そのもの自身を研究したい
  - その解法は必ず解を出力するのか?
  - 何ステップかかるのか?
- ここでは加減法のみを調べることにして, 代入法は考えない
- 最初に与えられたのと同じ個数 (m 個) の等式をキープして, 同値変形だけを行っていく
- 特定の許された操作のみを行う.

加藤 線形代数 練習 2(p.45), 練習 3(p.47)