2.2 行列の行基本変形 | 第 2 章 連立 1 次方程式

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L15(2023-06-07 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-06-09 Fri 07:55 JST hig"

今日の目標

- 行基本操作を説明できる
- 行階段形, その主成分, 階数の定義を説明できる
- 行簡約階段形の定義を説明できる

L14-Q1

TA Prob and Sol: 行列の積和逆スカラー倍

単位行列は上三角行列であることを示そう.

略解

$A = [a_{ij}]$ が単位行列とする.
すなわち $a_{ij} = \delta_{ij}$ とする.
$i > j$ とすると，特に $i \neq j$ なので, $a_{ij} = 0$.
よって，$i > j$ ならば $a_{ij} = 0$.
よって A は上三角行列.

コメント

ここまで来たよ

◆行基本操作と行基本変形 加藤 線形代数 p.48

定義 (行列の行基本操作 (elementary row operations))

$\textcircled{i}, \textcircled{j}$ は拡大係数行列の行番号. ①, ②, . . .

(R1) $\textcircled{i} \leftrightarrow \textcircled{j}$, $i \neq j$
(R2) $\textcircled{i} \times$ (定数c), $c \neq 0$
(R3) $\textcircled{j} \times$ (定数a) $+ \textcircled{i}$, $i \neq j$

行 Row, 列 Column

加藤 線形代数 練習 1(p.49) mobius K2.1.30

行基本変形 行基本操作を繰り返して行列を変形すること

行基本操作の可逆性

加藤 線形代数 p.49

行基本操作は, 別の行基本操作 (逆操作) で元に戻せる. だから連立 1 次方程式の変形としては同値.

(R1) $i \leftrightarrow j$, $i \neq j$ の逆操作は$\cdots$
(R2) $i \times (\text{定数}c)$, $c \neq 0$ の逆操作は$\cdots$
(R3) $j \times (\text{定数}a) + i$, $i \neq j$ の逆操作は$\cdots$

L15-Q1

Quiz(行基本変形による連立 1 次方程式の解法)

1. 連立 1 次方程式

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_3 &= 19\\
3x_1 + x_2 &= 24\\
2x_1 &= 14
\end{aligned}
$$

を行列で書いたときの拡大係数行列 $\tilde{A}$ を右側に並べて書こう.

2. 1 回の変形では R1, R2, R3 のいずれかを 1 個だけ使い (① $\times(-3)+$ ③ のような 記号を記すこと), 最終的に $\begin{matrix} x_1 = & 数, \\ x_2 = & 数, \\ x_3 = & 数 \end{matrix}$ になるように連立 1 次方程式と行列を変形していこう.

(本来は行列を [::] → [::] → [::] → ... のように横につなぐが，この問では，1 次連立方程式と並べて書く都合上，縦方向に書く)

加藤 線形代数 p.46 加藤 線形代数 練習 3(p.47)

(行) 階段形 (ref=row echelon form)

定義 ((行) 階段形 (row echelon form) 加藤 線形代数 定義 2-1(p.50))

m 行 n 列の行列 $A = [a_{ij}]$ が階段形であることの定義は 加藤 線形代数 p.51) を参照

加藤 線形代数 図 1(p.50)

そうである例

加藤 線形代数 例 1(p.50) ,aE, O

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

そうでない例 加藤 線形代数 注意 (p.51) 3 のところが縦 2 段になってるのがだめ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 練習 2(p.52) mobius　K2.2.30

定義 (階段形のいろいろな量 加藤 線形代数 p.51)

- 階数 (rank) $r = \mathrm{rank} A$「段の個数」
- 主番号 整数 $1 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_r \leq n$「段の横方向の位置 (列番号)」
- 主列 第 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ 列
- 主成分 (ピボット (pivot)) a_{ic_i} $(i = 1, \ldots, r)$「階段の角」

mobius　K2.2.30

そうである例 加藤 線形代数 例 1(p.50) $,aE, O$

$$
\begin{bmatrix}
0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

◆(行) 簡約階段形 (rref=reduced row echelon form)

定義 ((行) 簡約階段形 加藤 線形代数 定義 2-2(p.52))

$m \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ が簡約階段形

$\Leftrightarrow$

- E1 A か階段形
- E2 主成分がすべて 1, すなわち，$a_{ic_i} = 1$ $(i = 1, \ldots, r)$.
- E3 各主列における主成分の上下の成分がすべて 0, すなわち，$a_{jc_i} = 1$ $(i = 1, \ldots, r, j < i)$.

そうである例

加藤 線形代数 例 2(p.53) $,E,O$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

加藤 線形代数 練習 4(p.53) mobius K2.2.30

階段形だが簡約階段形でない例

加藤 線形代数 例 1(p.50), $aE(a \neq 1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆行基本変形定理

加藤 線形代数 定理 2-1(p.53)

定理 (行基本変形定理)

任意の行列 A は, 適当な行基本変形によって, 簡約階段形に変形できる. 変形後の行列 (A の簡約階段化) はただ一つに定まる 加藤 線形代数 注意 (p.58).

驚いて疑ってほしい定理
驚いて疑ってほしい定理
一意性の証明 教科書でも省略 (サポートサイトにあるそう)
存在の証明 入力:A, 出力:A の簡約階段化 であるようなアルゴリズム (あいまいさのない手続き) 加藤 線形代数 p.53–57 を与えることによる
このアルゴリズムは掃き出し法 (row reduction, ガウスの消去法 (Gaussian elimination) などと呼ばれ, 理論的理解に加え, 今後の手計算に使うので暗記する必要. 説明延期