3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L20(2023-06-23 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-06-23 Fri 11:19 JST hig"

今日の目標

- 行基本変形を用いて正則か判定し逆行列を求められる

加藤 線形代数 p.89

L19-Q1

Quiz 解答: 基本行列の逆行列

$P_i(c^{-1}) = [d_{\ell p}], P_i(c)P_i(c^{-1}) = [f_{kp}]$ とする. $f_{kp} = \delta_{kp}$ を言えば, $P_i(c)P_i(c^{-1}) = E$, すなわち, $P_i(c)^{-1} = P_i(c^{-1})$ を言ったことになる.

$$\begin{aligned} f_{kp} &= \sum_{\ell=1}^{n} b_{k\ell} \cdot d_{\ell p} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \delta_{k\ell}(1 \cdot (1-\delta_{ik}) + c \cdot \delta_{ik}) \cdot \delta_{\ell p}(1 \cdot (1-\delta_{i\ell}) + c^{-1} \cdot \delta_{i\ell}) \\ &= \qquad (1 + (c-1)\delta_{ik}) \cdot \delta_{kp}(1 + (c^{-1}-1)\delta_{ik}) \\ &= \delta_{kp}(1 + (c-1)\delta_{ik} + (c^{-1}-1)\delta_{ik} + (c-1)(c^{-1}-1)\delta_{ik}\delta_{ik}) \\ &= \delta_{kp}(1+0). \end{aligned}$$

最後の等号では, $\delta_{ik}\delta_{ik} = \delta_{ik}$ を使った ($i = k$ かどうかに応じて, $1^2 = 1$ または $0^2 = 0$).

正則か？ の判定

ベースは「正則行列の構造」 加藤 線形代数 定理 2-2(p.85)

行列 A が正則かどうかの，成分からのいつでも使える判定方法

- 正方行列 (n 行 n 列) であることが大前提．
- 階段形にして，階数 $\mathrm{rank}(A) = n$ なら正則，階数 $\mathrm{rank}(A) < n$(途中で見えちゃうこともある) なら正則でない．

たまたま判定できるケース

- $n = 2$ なら，$\Delta = ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は正則.
- A にうまく行基本変形して，加藤 線形代数 例題 1，練習 2，練習 3(p.86) の形に持って行けるなら正則でない
- $XA = AX = E$ となる X が見つかれば正則（もともとの定義）
- 加藤 線形代数 §4 になると，行列式 $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$は正則 で便利に判定できる

ここまで来たよ

19 3.2 正則行列 | 第 3 章 行列の構造

20 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造
- ◆逆行列と基本変形
- ◆逆行列の求め方

◆逆行列と基本変形 加藤 線形代数 p,.88

加藤 線形代数 定理 2-2(p.85) より
任意の n 次正則行列 A は, n 次基本行列のある積として次のように書ける…「E に $Q_s, \ldots, Q_1$ の順に基本操作を適用すると A」

$$A = Q_1 \cdots Q_s E. \tag{*}$$

(*) に，左から $Q_1^{-1}, Q_2^{-1}, \ldots, Q_s^{-1}$ の順にかけると次のようになる.

$$Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1} A = E. \tag{**}$$

A に $Q_1^{-1}, \ldots, Q_s^{-1}$ の順に基本操作 (逆操作) を適用すると E
(*) の，両辺の逆行列をとると次のようになる

$$A^{-1} = Q_1^{-1} \cdots Q_s^{-1} E. \tag{***}$$

E に $Q_1^{-1}, \ldots, Q_s^{-1}$ の順に基本操作 (逆操作) を適用すると A^{-1}
$Q = Q_1 \cdots Q_s, Q^{-1} = Q_s^{-1} \cdots Q_1^{-1}$.

$E \xrightarrow{Q} A \quad (*)$
↕逆変形
$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$

$A \xrightarrow{Q^{-1}} E \quad (**)$
↕同じ行基本変形
$E \xrightarrow{Q^{-1}} A^{-1} \quad (***)$

逆行列を作る行基本変形 加藤 線形代数 p.89

任意の正則行列 A について,
A に施して E を作る (簡約階段形にする) 行基本変形を
E に施すと,
A^{-1} が作られる.

https://bit.ly/redmatrix

「自分の操作の履歴」
範囲指定スクリーンショット をアップロードしよう

Windows 11 Windows+Shift+S
Mac Command+Shift+4

ここまで来たよ

19 3.2 正則行列 | 第 3 章 行列の構造

20 3.3 逆行列 | 第 3 章 行列の構造
- ◆逆行列と基本変形
- ◆逆行列の求め方

◆逆行列の求め方 加藤 線形代数 p.89

逆行列を求める筆算

n 次の正方行列 A が与えられたとき, $n \times (2n)$ 行列 $[A|E]$ を考え, **行**基本変形で (掃き出し法で) 簡約階段形にする.

$$[A|E] \to \cdots \to [E|B]$$

となったなら, A は正則で, B が求める逆行列 $B = A^{-1}$.

加藤 線形代数 例題 1(p.92)

「A が正則であるかどうか調べ, 正則であればその逆行列を求めよ」

「逆行列の求め方」で, $[A|E]$ を簡約階段形に基本変形する. $[E|B]$ に到達したなら逆行列 $B = A^{-1}$ が得られる. $[E|B]$ に到達しないなら ($\mathrm{rank}(A) < n$ なら), 正則でない. 副産物として $\mathrm{rank}(A)$ が求まる.

https://bit.ly/redmatrix

mobius K3.3.10 加藤 線形代数 練習 3(p.92), 章末問題 4(p.94)

Quiz(逆行列)

L20-Q1 次の行列は正則か？ 正則なら逆行列を答えよう．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quiz(逆行列)

L20-Q2 次の行列は正則か？ 正則なら逆行列を答えよう.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

復習: 掃き出し法

線形代数☆演習 I(2023)L16 加藤 線形代数 pp.54–56

段 (主列) に関する再帰的手続き (1 段ずつ順に正しい形にしていく)

掃き出し法の概要

(1) $A = O$ ならそのまま行簡約階段形
すでに完成した主列の主成分の右下をブロックと呼ぶ

(2) 零でない再左の列で, R1 によりブロックの 1 行目に非零成分 c を持っていってピボットにする

(3) 持っていった非零成分 c を R2 ① $\times (1/c)$ で 1 にする

(4) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックの $i(\geq 2)$ 行目の a を零にする

(10) R3 ① $\times (-a) +$ ⓘ で, ブロックのその列の上側を零にする

(5)–(9) これで段が「完成」したので, 今度はピボットの右下をブロックとして (2)–(10) を「再帰的に」行う

(12) 右下のブロックが $A = O$ なら終了

必ず, 有限回の操作で終了して, 簡約階段形に到達する.