

4.1 置換 | 第 4 章 行列式

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L22(2023-06-30 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-06-30 Fri 11:27 JST hig"

今日の目標

- 置換を説明できる
- 置換の符号を, 差積, 転倒数の計算から求められる



L21-Q1

Quiz 解答: 逆行列と連立 1 次方程式

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}. \\ \textcircled{2} \quad A^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}. \\ \textcircled{3} \quad A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}a+b-c \\ \frac{2}{3}a-b+c \\ -\frac{2}{3}a+b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L21-Q2

Quiz 解答: 特殊解と一般解

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする.

- ① $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が成立するので, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の (ひとつの) 解である.
- ② 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の一般解を 2 通りに表示しよう. 拡大係数行列 $[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ はすでに簡約階段形になっている. 一般解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} c \quad (c \in \mathbb{R})$$

一般解は他の形にも表示できる. $c \in \mathbb{R}$ は任意定数なので, $d = c + 1$ などとおいた

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} d \quad (d \in \mathbb{R})$$

も一般解の別の形の表現である.

③ c に適当な値をいれたものが特殊解で、例えば、

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

などがある.

L21-Q3

Quiz 解答: 特殊解と同次連立 1 次方程式の一般解

① 基本変形により、

$$[A|\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} c \quad (c \in \mathbb{R})$$

2

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

はひとつの解.

3 命題より,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

ここまで来たよ

21 逆行列と連立 1 次方程式の解 | 第 3 章 行列の構造

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式

- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換

写像と変換の復習

加藤 線形代数 pp.6,8,10,12,191-

◆置換

定義 (置換 加藤 線形代数 p.98)

有限集合 $\{1, \dots, n\}$ 上の変換 加藤 線形代数 p.6 で, 1 対 1 加藤 線形代数 p.16, 上への写像 加藤 線形代数 p.15 になっているものを置換 (permutation) という.

加藤 線形代数 例 1(p.98) $X = \{1, \dots, 5\}$ の置換 $\sigma : X \rightarrow X$.

$$\sigma(x) = \begin{cases} 3 & (x = 1) \\ 5 & (x = 2) \\ 2 & (x = 3) \\ 4 & (x = 4) \\ 1 & (x = 5) \end{cases}$$

別の書き方 $\sigma : 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 5 \mapsto 1$.

この σ に対して $\sigma(2) = 5$.

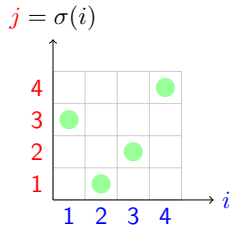
置換のグラフ

$n = 4, X = \{1, 2, 3, 4\}$.

例として X の置換 $\sigma(x) = \begin{cases} 3 & (x = 1) \\ 1 & (x = 2) \\ 2 & (x = 3) \\ 4 & (x = 4) \end{cases}$

左が $j = \sigma(i)$ の‘グラフ’

- 変換であること: 各列に●が1個ある
- ‘1対1かつ上への’変換であること: 各行に●が1個ある



問: 逆変換 $=\sigma^{-1}$ のグラフは?

置換の略記方法

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{array} \right).\end{aligned}$$

(角括弧は行列, 丸括弧は置換)

- これらの数は, 「番目」でなく, その数 $\in X$ を表す.
 $X = \{A, B, C, D, E\}$ でも同じことができる.
- 1 対 1 の変換=全単射であることから, 上下の行には同じ数がちょうど 1 回ずつでてくる.
- 置換を 1 個決めるごとに, 下の行に順列 (例)35241 がでてくる, という気分の記号.
- $\{1, \dots, n\}$ の置換は, n 個から n 個を取り出す順列の個数 ${}_n P_n = n!$ 個ある.

ここまで来たよ

21 逆行列と連立 1 次方程式の解 | 第 3 章 行列の構造

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式

- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換

◆置換の合成

定義 (置換の合成 加藤 線形代数 p.99)

σ, τ : 置換.

合成変換 $\tau(\sigma(x)) = (\tau \circ \sigma)(x)$ のことを, 置換の合成 $\tau\sigma$ と書く.

x に近い σ が先に x にあたる $A(Bx) = (AB)x$ と同じのり.

「積」のように見えるが, 写像の合成なので $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

略記 $\underbrace{\sigma \cdots \sigma}_k = \sigma^k. (k > 0)$

加藤 線形代数 例題 1(p.100), 練習 2(p.100)

L22-Q1

Quiz(置換の合成)

集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$$

を考える.

- ① 元 $\sigma\tau(3), \tau\sigma(3)$ を求めよう.
- ② 置換 $\sigma\tau, \tau\sigma$ を求めよう.
- ③ 元 $\tau^{-1}(3)$ を求めよう.
- ④ 置換 τ^{-1} を求めよう.

◆単位置換と逆置換|1. 置換

定義 (単位置換 加藤 線形代数 p.101)

恒等変換 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を単位置換という。

任意の置換 σ に対して $\sigma e = e\sigma = \sigma$.

定義 (逆置換 加藤 線形代数 p.101)

σ の逆変換 $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を σ の逆置換という。

$(\tau\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\tau^{-1}$. (合成変換の逆変換の性質の反映) mobius K4.1.10
なんか行列の積に似てる…

「 X の置換全体は X の対称群 (symmetric group) S_n という群 (group) をなす. n 次正則行列全体は群 $GL(n)$ をなす」

代数入門 (3 年)

略記 $\underbrace{\sigma^{-1} \cdots \sigma^{-1}}_k = \sigma^{-k}$. ($k > 0$). $\sigma^0 = e$.

ここまで来たよ

21 逆行列と連立 1 次方程式の解 | 第 3 章 行列の構造

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式

- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換

◆置換の符号

定義 (差積 加藤 線形代数 p.102)

n 変数 (x_1, \dots, x_n) の差積とは, 多項式

$$D(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

$n \times n$ 個のペア (i, j) のうち, $n(n-1)/2$ 個の積.

加藤 線形代数 例 4(p.103)

定義 (総積の記号)

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Σ for Sum, $\Pi(\pi$ の大文字) for Product.

例 $\prod_{k=1}^n k = n!$, $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!$.

L22-Q2

Quiz(置換と添字)

関数変数 $\{x_i | i = 1, 2, 3\}$ の関数 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$ を考える.

$\{1, 2, 3\}$ の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を考える.

- ① $f(x_2, x_3, x_1)$ を求めよう.
- ② $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ を求めよう.
- ③ $f(x_{\tau\sigma(1)}, x_{\tau\sigma(2)}, x_{\tau\sigma(3)})$ を求めよう.

定義 (置換の符号 加藤 線形代数 定義 1-1(p.103))

$\{1, \dots, n\}$ の置換 σ について

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \frac{D(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})}{D(x_1, \dots, x_n)} = \pm 1$$

を σ の **符号 (signature)** という.

ここで定義した**符号**とは、整数 ± 1 のことで、‘正’、‘負’ という語ではない.

加藤 線形代数 p.105

定義 (偶置換奇置換)

- 符号が $+1$ の置換を **偶置換**,
- 符号が -1 の置換を **奇置換** という.

ここまで来たよ

21 逆行列と連立 1 次方程式の解 | 第 3 章 行列の構造

22 4.1 置換 | 第 4 章 行列式

- ◆置換|1. 置換
- ◆置換の合成, 単位置換, 逆置換|1. 置換
- ◆置換の符号|1. 置換
- ◆偶置換と奇置換|1. 置換

置換の符号の性質

定理 (置換の符号の合成公式) 加藤 線形代数 定理 1-1(p.104), 系 1-1(p.105)

置換 σ, τ , 単位置換 e に対して,

- $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma) \times \text{sgn}(\tau)$ (*)
- $\text{sgn}(e) = 1$.
- $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn} \sigma$.

「 sgn は置換の群から乗法群 $\{\pm 1\}$ への群準同形写像」
 (*) の証明

代数学入門

$$D(x_{\tau(1)}, \dots) = \text{sgn}(\tau) \times D(x_1, \dots)$$

の分子分母にはそれぞれ x_1, \dots, x_n が現れている. 約分すると消えるのだから, どんな文字でもいい. x_1, \dots, x_n を, $y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}$ に置き換える. sgn の定義より,

$$\text{右辺} = \text{sgn}(\tau) \times D(y_{\sigma(1)}, \dots) = \text{sgn}(\tau) \times \text{sgn}(\sigma) D(y_1, \dots)$$

$$\text{左辺} = D(y_{\sigma(\tau(1))}, \dots) = \text{sgn}(\sigma\tau) \times D(y_1, \dots)$$

置換の符号の別の特徴づけ (1)

加藤 線形代数 例題 3(p.104)

定義

$X = \{1, \dots, n\}$ の置換 σ に対して,
 X の要素の $n(n-1)/2$ 個のペア (i, j) ($i < j$) のうち, $\sigma(i) > \sigma(j)$ であるものの個数を,
 σ の **転倒数** という.

命題

$\text{sgn } \sigma = (-1)^\sigma$ の転倒数.

加藤 線形代数 練習 5(p.104)

mobius K4.1.20, K4.1.30

◆偶置換と奇置換|1. 置換

定理 (加藤 線形代数 定理 1-2(p.106))

$X = \{1, \dots, n\}$ の置換を考える ($n \geq 2$).

- 置換全体は ${}_n P_n = n!$ 個ある.
- 偶置換は $n!/2$ 個ある.
- 奇置換は $n!/2$ 個ある.

証明 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots \end{pmatrix}$ を固定する. $\tau^{-1} = \tau$. $\text{sgn}(\tau) = -1$.

X の置換全体の集合 S_n の上の変換 $\sigma \mapsto \tau\sigma$ を考えると, これは 1 対 1.