

数式処理

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I L26(2023-07-14 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2023-07-14 Fri 07:19 JST hig"

今日の目標

- スカラー 3 重積と行列式との関係を説明できる
- 数式処理を使う方法を説明できる
- 数式処理 Maple で線形代数の計算ができる



L25-Q1

- ① $\det(P_{ij}) = -1.$
- ② $\det(P_i(c)) = c.$
- ③ $\det(P_{ij}(a)) = 1.$

L25-Q2

$$\begin{aligned}
 & 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\textcircled{1} \times \frac{1}{4}}{=} 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\textcircled{1} \times (-3) + \textcircled{2}}{=} 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\textcircled{2} \times (-1) + \textcircled{3}}{=} 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\textcircled{4} \leftrightarrow \textcircled{3}}{=} 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{確認: 階段行列.}}{=} \\
 & -4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = -60.
 \end{aligned}$$

ここまで来たよ

25 4.3 行列式の計算 | 第4章 行列式

26 数式処理

- 3 次の行列式と体積, 体積拡大率
- 数式処理システム Maple

復習

外積

線形代数☆演習 I(2023)L02

加藤 線形代数 p.265-266

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 \quad a_1 \quad b_1 \\ \mathbf{e}_2 \quad a_2 \quad b_2 \\ \mathbf{e}_3 \quad a_3 \quad b_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_1 \quad b_1 \\ a_2 \quad b_2 \end{array}$$

スカラー 3 重積

線形代数☆演習 I(2022)L03

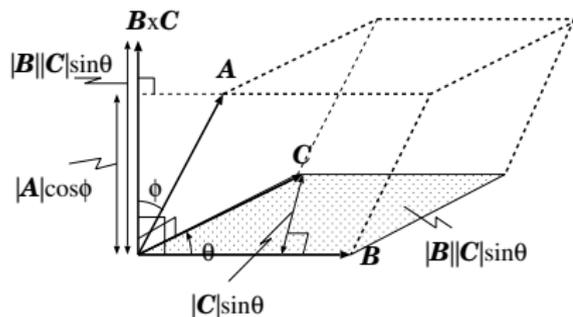
外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はベクトル.

ということは, 内積 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ はスカラー (1 個の実数) になる.

図形的に考えると, 絶対値 $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ は, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を 3 辺とする

平行六面体の体積.

右の図は $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}$ を描いている.



平行六面体の体積とスカラー 3 重積と行列式の図形的意味

加藤 線形代数 なし

3 個の列ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を並べた 3 次正方行列の行列式は, スカラー 3 重積, すなわち, 平行六面体の符号付き体積に等しい

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \det[\mathbf{abc}]$$

実は, n 次正方行列の行列式 $\det[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ は \mathbb{R}^n で $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を辺とする n 次元の '平行 $2n$ 面体' の符号付き体積.

行列式は行列の「大きさ」のようなもの

3 次の行列式は体積拡大率と思える

$A = [abc]$ の表す \mathbb{R}^3 の 1 次変換 f により,

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は a に, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ は b に, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ は c に写る.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を 3 辺とする立方体は, 1 次変換 f により, a, b, c を 3 辺とする平行六面体, またはそれをつぶした平面, 直線, 点に写る.

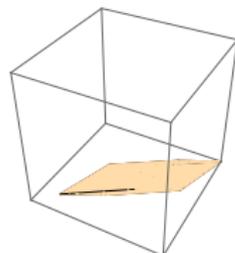
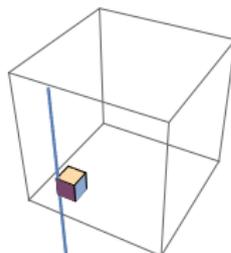
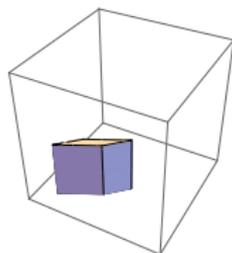
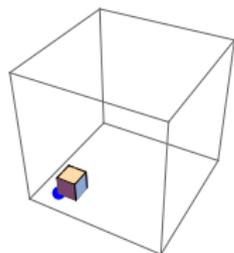
行列式 $\det A$ は 1 次変換 f の拡大率 (裏返しなら負).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 9$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 0 \text{ (平面につぶれる場合)}$$



L26-Q1

Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

を3辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ の表す線形変換で写した.
写す前後の平行六面体の体積を求めよう.

L26-Q2

Quiz(体積拡大率)

ベクトル

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

を3辺とする平行六面体を, 行列 $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ の表す線形変換で写した.

写す前後の平行六面体の体積の比を求めよう.

mobius K4.2.50

ここまで来たよ

25 4.3 行列式の計算 | 第4章 行列式

26 数式処理

- 3 次の行列式と体積, 体積拡大率
- 数式処理システム Maple

Maple とは

<https://jp.maplesoft.com/products/maple/>

Waterloo University, Canada で開発され Maplesoft 社で開発・販売される数式処理システム.

ライバル Mathematica, sympy.

数式処理システム (Computer Algebra System) とは

量を整数変数 (int), 浮動小数点変数 (double) に記憶して扱うのではなく, 数式を文字列として (実はもっとハイテクな方法で) 記憶して処理するシステム. 無限大なども扱える. "a+b" と "b+a" は文字列として異なるが, 数式処理システムは, 表す数式の意味が同じであることを知っている.

その意味ではコンパイラに似てる面がある?

数学研究でハードに使われてる

龍大内で Maple を使える PC と場所

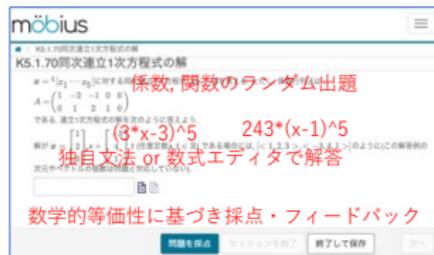
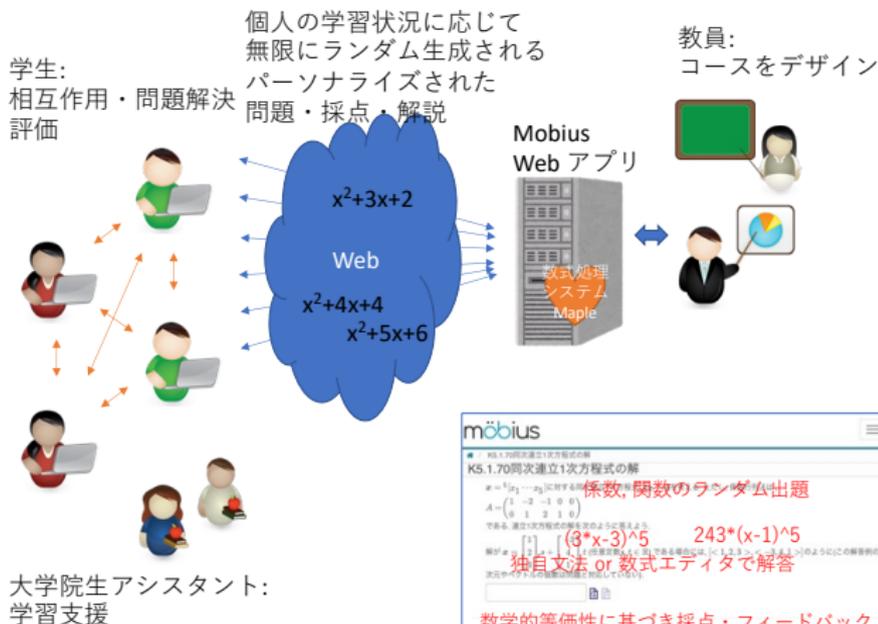
先端理工学部がサイトライセンスに加入しているため「キャンパス内では無料で」使用できます。

- (無料) 瀬田の学内実習室 (3号館地下, 1号館 (含む 1-612)) の Windows 10 で
- (無料) ru-wifi に接続した個人 PC
 - ▶ 任意の場所で各自でダウンロード, インストールした後, 使用时には ru-wifi に接続する. 使用时に activation (有効化) する.
 - ▶ 案内 (全学認証)<https://docs.google.com/document/d/1hqFjKZT5qRjEtg2BpZD7Nx1PTqf0gk6k1IQXfqTvIwx>
- (有料) サイトライセンスに頼らず, 生協で学生版 (Win/Mac) を購入 <https://software.univcoop.or.jp/item/14466>
 - ▶ ru-wifi への接続の必要なし
 - ▶ 在学中のみ利用可
 - ▶ Maple 2023 学生版は税込 13200 円

いずれも学習目的に限定.

Web アプリケーション, 学習支援システムとは

Mobius は, 数式処理システム Maple をバックエンドとして, Web アプリケーションとして構築された学習支援システム



Maple ワークシート

- Enter 計算実行
- Shift+Enter 計算実行せず改行

左端の二重線 ブロック区切り

T ボタン テキストブロックを作る



> ボタン コードブロックを作る

左端の > プロンプト この右にコードを入力する

- ; 行の最後 (or 次の行との区切り) 省略可 (C でいう;)
- : 非表示行末
- := 変数への代入 (C でいう=)
- = 条件の等式 (C でいう==)
- # ここから行末までコメント (C でいう//, /* */)

- 挿入 > Maple Input で, Mobius のテキスト入力相当 (お奨め) になる
- 挿入 > 2D Math で, Mobius の数式エディタ相当になる.
- 環境設定から, どちらをデフォルトにするか選べる (初期は 2D Math)

Maple の文法

Mobius の解答入力と共通点多い
線形代数ライブラリの導入
行列, 列ベクトル, スカラー
の変数代入

$$A + B$$

$$AB$$

$$A^3 v$$

$$c v$$

$$A^{-1}$$

$$\det A$$

$A \rightarrow$ 行簡約階段形

```
with(LinearAlgebra);
A:=<<1|2>, <3|4>>;
B:=<<5,6>|<7,8>>;
v:=<5,6>;
c:=-5;
```

```
A + B;
A . B; # . は非可換な積. 表
A^3 . v; # . は行列とベクト
c * v;
MatrixInverse(A);
Determinant(A);
ReducedRowEchelonForm(A);
```

実習課題 teamL26 の要約

Moodle 上の動画と指示にしたがってください.

- ① mobius Trial L26 の自分の問題の行列を取得する.
- ② 配布した Maple ワークシートのサンプルを編集して, 行列 A,B に代入して, 最終結果の逆行列と行列式を計算してメモしておく. Trial L26 の検算に利用する.
- ③ 自分が編集した上のような編集した Maple ワークシート (ファイル名自由) を, Moodle の team26 にアップロードして提出する.

参考:Maple で 微積分

グラフ描画 plot a graph

```
plot(sin(x)^2);
```

微分 differentiate

```
diff(sin(x)^2,x,2);
```

原始関数 integral

```
int(sin(x)^2);
```

定積分 integral

```
int(sin(x)^2,x=0..Pi/2);
```

積分の過程表示

```
with(Student:-Calculus1):  
ShowSolution(int(sin(x)^2));
```