5.1 ベクトル空間と部分空間 | 第 5 章 ベクトル空間

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

線形代数☆演習 I　L28(2023-07-21 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2023-07-23 Sun 06:46 JST hig"

今日の目標

- ベクトル空間の部分空間である/ない証明ができる
- 同次/非同次連立 1 次方程式の解全体の集合を求められる

L27-Q1

Quiz 解答: 行列式の余因子展開

1.

$$\begin{vmatrix} 21 & 0 & 23 & 25 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 37 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^2 21 \begin{vmatrix} 31 & 3 & 5 \\ 37 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^3 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^4 23 \begin{vmatrix} 2 & 31 & 5 \\ 7 & 37 & 11 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^5 25 \begin{vmatrix} 2 & 31 & 3 \\ 7 & 37 & 9 \\ 13 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dots$$

第 4 行に関する展開の方が楽.

2.

$$\begin{vmatrix} 21 & 0 & 23 & 25 \\ 2 & 31 & 3 & 5 \\ 7 & 37 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^3 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^4 31 \begin{vmatrix} 21 & 23 & 25 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^5 37 \begin{vmatrix} 21 & 23 & 25 \\ 2 & 3 & 5 \\ 13 & 0 & 17 \end{vmatrix} + (-1)^6 0 \begin{vmatrix} 21 & 23 & 25 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} = \dots$$

L27-Q2

Quiz 解答: 行列式の還元定理　例えば第 1 行に関して余因子展開して,

$$21 \det \begin{bmatrix} 31 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 11 \\ 37 & 0 & 17 \end{bmatrix}.$$

還元定理を使ったと言っても同じこと.

複数の基本操作を続けて適用する場合の略記の方法

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times(-\frac{1}{2})+②} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\times(-2)+①} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

は次のように略記してよい．1 個 1 個は基本操作である必要があり，上から順に実行する．

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[②\times(-2)+①]{①\times(-\frac{1}{2})+②} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

同時に実行ではない（あれ？ 階数が変わっちゃった？)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[②\times(-2)+①]{①\times(-\frac{1}{2})+②} \begin{bmatrix} 1\times(-2)+2 & 2\times(-2)+2 & 5\times(-2)+6 \\ 2\times(-\frac{1}{2})+1 & 2\times(-\frac{1}{2})+1 & 6\times(-\frac{1}{2})+5 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

下から実行ではない（あれ？ 結果違うじゃん？）

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\times(-2)+①} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\times(-\frac{1}{2})+②} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ひとつの矢印に書いた 1 個 1 個は基本操作である必要があり，上から順に実行する．
行列式の計算の ＝ も同様

ここまで来たよ

27 4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式

- 1. 部分空間
- (復習) ◆連立 1 次方程式

◆ベクトル空間

加藤 線形代数 pp.136-143 ベクトル空間 (vector space) という一般の概念, 定義があり, これまで自然に扱ってきた 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ はその典型例になっている. 線形代数☆演習 II(2023)L??

教科書は一般のベクトル空間の定義 加藤 線形代数 定義 5-1-1(p.141) に基づいて話をしているが,

授業では $\mathbb{R}^n$ という具体例に限定して説明する. 教科書は $V = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}$ と思って利用しよう.

◆部分空間

定義 (部分空間 加藤 線形代数 p.144)

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ の部分集合 $W \subset V$ について, 次の条件が満たされるとき, W は V の部分空間 (subspace), 部分ベクトル空間 (vector subspace) であるという.

S1 $\mathbf{0} \in W$

S2 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W \Rightarrow \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W$　'W は和で閉じている'

S3 $\boldsymbol{v} \in W, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\boldsymbol{v} \in W$　'W はスカラー倍で閉じている'

加藤 線形代数 例 1, 例題 1, 練習 3(p.145)

L28-Q1

Quiz(ベクトル空間の部分空間の判定)

$V = \mathbb{R}^2$ とする.

1. $W_1 = \{ [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \, | x + 2y = 0 \}$ は V の部分空間か.
2. $W_2 = \{ [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \, | x + 2y = 2 \}$ は V の部分空間か.
3. $W_3 = \{ [\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}] \, | x = 0 \text{または} y = 0 \}$ は V の部分空間か.

方針

- であることの証明: S1–3 のすべてを言う. S2,3 の A ならば B(A⇒B) を言うには, A を仮定して B を言う.
- でないことの証明: S1 を満たさないことを言うか, 反例 (S2 または S3 を満たさない $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の例) を挙げる.

証明

ここまで来たよ

27 4.4 行列式の展開 | 第 4 章 行列式

- 1. 部分空間
- (復習) ◆連立 1 次方程式

◆解の存在 線形代数☆演習 I(2023)L17

定理 (連立 1 次方程式の解の存在と自由度 加藤 線形代数 定理 3-2(p.65))

A を $m \times n$ 行列とする.
n 変数の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (*) の拡大係数行列 $\tilde{A} = [A|\boldsymbol{b}]$ とする.

1. (*) が解を持たない $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\, A < \mathrm{rank}[A|\boldsymbol{b}]$.
2. (*) が解を持つ $\Leftrightarrow \mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}[A|\boldsymbol{b}]$. (†)
   - (†) が成り立つとき, (*) の解の自由度は $n - \mathrm{rank}\, A$.

(†) が成り立つとき, 解の自由度が 0 なら解は一意に定まる, 正なら無限個の解が存在する.

加藤 線形代数 例題 3(p.68), 加藤 線形代数 練習 4(p.69) mobius K2.3.30

同次連立 1 次方程式の自明な解と非自明な解

線形代数☆演習 I(2023)L17 線形代数☆演習 I(2023)L18

自明な解とは，すべての同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が持つ解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のこと.

定理 (同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在 加藤 線形代数 定理 3-3(p.69))

A を $m \times n$ 行列とする.
n 変数の同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (**) は

1. $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow$ (**) は自明な解しか持たない.
2. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ (**) は非自明な解を持つ.

解の自由度は $n - \operatorname{rank} A$.

同次/非同次連立 1 次方程式の関係 線形代数☆演習 I(2023)L21

命題

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (*) と，対応する同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (**) を考える．
(*) の一般解任意定数内蔵は，
((*) の特殊解)+((**) の一般解任意定数内蔵)，の形に書ける．

(*) の一般解の定数部分は $A, \boldsymbol{b}$ から，任意定数内蔵部分は A だけから決まる

証明 (この形ならば解)

(*) の特殊解を $\boldsymbol{x}_0$, (**) の解を $\boldsymbol{x}_1$ とする．
$A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0}$.
よって，$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ は (*) の解．

証明 (解ならばこの形)

(*) の任意の解 $\boldsymbol{x}$ を考える．(*) の特殊解を $\boldsymbol{x}_0$ とする．
$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となり，
$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$ は (**) の解．
よって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0+$ (**) の解．

定義 (連立 1 次方程式の解全体の集合 加藤 線形代数 p.146 線形代数☆演習 I(2023)L17)

A: $m \times n$ 行列, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n = V$ を考える.
連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解全体の集合とは,
$W = \{\boldsymbol{x} |\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} \subset \mathbb{R}^n$.

定理 (同次連立 1 次方程式の解空間 加藤 線形代数 p.146)

同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解全体の集合

$$W = \{\boldsymbol{v} | A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} \subset V$$

は V の部分空間をなす. この部分空間 W を, その同次連立 1 次方程式の解空間という.

W を, A の表す線形写像 $f : V \to V$ の核 (カーネル) $\ker f$ という

線形代数☆演習 II(2023)L??

証明

同次連立 1 次方程式の解空間

線形代数☆演習 I(2023)L17 線形代数☆演習 I(2023)L18

定理 (同次連立 1 次方程式の非自明な解の存在 加藤 線形代数 定理 3-3(p.69)**)**

A を $m \times n$ 行列とする.
n 変数の同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (**) は

1. $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow$ (**) は自明な解しか持たない.
2. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow$ (**) は非自明な解を持つ.

$n - \operatorname{rank} A$ を解の自由度という.

- $\mathbf{0}$ は自明な解.
  - 同次連立 1 次方程式の解空間の直線や平面は原点を通る.
- 自明な解しか持たないなら, 解は一意に定まる.
  - 解空間が 1 点=原点の場合のこと.
- 非自明な解が存在するなら, 無限個の解が存在する.
  - 解空間が原点を通る直線や平面のときが, 非自明な解があるとき.

加藤 線形代数 例題 4, 練習 5(p.70), 章末問題 3(p.72) mobius K2.3.50 mobius K2.3.70

例題

L28-Q2

Quiz(連立 1 次方程式の解全体の集合)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

とする．

1. rank A を求めよう．
2. 非同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ に解はあるか？ あるなら解の自由度を求めよう．解全体の集合を求め，$V = \mathbb{R}^2$ に描こう
3. 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ に非自明な解はあるか？ 解の自由度を求めよう．解空間を求め，$V = \mathbb{R}^2$ に描こう．

L28-Q3

Quiz(連立 1 次方程式の解全体の集合)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

とする.

1. 非同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は解をもつか？ あるなら解の自由度を求めよう．解全体の集合を求め，$V = \mathbb{R}^2$ に描こう.
2. 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ は非自明な解をもつ？ 解の自由度を求めよう．解空間を求め，$V = \mathbb{R}^2$ に描こう.

L28-Q4

Quiz(連立 1 次方程式の解全体の集合)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

とする.

1. 同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ は非自明な解をもつか? 解の自由度を求めよう. 解空間を求めよう.
2. 非同次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 26 \\ 52 \\ 84 \end{bmatrix}$ は解をもつか？ もつなら解の自由度を求めよう. 解全体の集合を求め $V = \mathbb{R}^3$ に描こう（Hint: 各平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ との交点を求めよう）. 同次の解集合もあわせて描こう.