

母比率の検定・p値・統計的仮説検定の考え方

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L14(2021-07-14 Wed)

最終更新: Time-stamp: "2021-07-10 Sat 17:34 JST hig"

今日の目標

- 母比率の片側・両側検定ができる [岩薩林 確率・統計 §7.3](#)
- 棄却域 [岩薩林 確率・統計 p.149](#), p値 [岩薩林 確率・統計 p.152](#) 両方の考え方で検定ができる



L13-Q1

Quiz 解答:母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定

- 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
- 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $\mu_0 = 55\text{g}$ に等しい」すなわち「 $\mu = \mu_0$ 」とする. 対立仮説を「 $\mu \neq \mu_0$ 」とする.
- サイズ n の標本の標本平均値を \bar{X} , 不偏標本分散を s^2 とするとき, 検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$

は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $n - 1$ の t 分布に従う.

- この標本の実現値は, $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{49 - 55}{\sqrt{\frac{1}{5} \frac{16}{5-1}}} = -3\sqrt{5} = -6.708$.
- t 分布表より, 棄却域は $|t| > t_4(0.05/2)$ すなわち $|t| > 2.776$.

- ⑥ t の実現値は棄却域に含まれるので、帰無仮説を棄却する。ドーナツの重さの母平均値は 55g と異なる, と結論する。
 (注: このことを, 「有意」 significant という言葉で表現する人もいる。結果は有意である, 母平均値 μ は 55g と有意に異なる, 母平均値 μ と 55 の間には有意差がある, 有意な標本である, など)

L13-Q2

Quiz 解答:正規分布の母平均値に関する t 検定

- ① 有意水準 0.05 で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う。
 ② 帰無仮説を「ドーナツ販売開始後の, 来店客数の母平均値 μ は 196 に等しい」, すなわち $\mu = 196$ とする。対立仮説を $\mu \neq 196$ とする。

- ③ サイズ n の標本の標本平均値を \bar{X} , 不偏標本分散を s^2 とすると, 検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - 196}{\sqrt{s^2/n}}$$

は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $n - 1$ の t 分布に従う.

- ④ この標本の実現値は $\bar{X} = 200, s^2 = \frac{224}{4-1} = 74.7$. よって,
 $t = \frac{200-196}{\sqrt{\frac{1}{4} \frac{224}{3}}} = 0.92582$.
- ⑤ t 分布表より, 棄却域は $|t| > t_3(0.05/2)$ すなわち, $|t| > 3.182$.
- ⑥ この標本の実現値は棄却域に含まれないので, 帰無仮説は棄却できない. 来店客数の母平均値が変化したとは結論できない.
 (注: 結果は有意でなかった, 母平均値 μ と 196g の間には有意差がない, など).

L13-Q3

Quiz 解答:母平均値の片側検定 (母分散未知)=片側 t 検定

- ① 有意水準 $\alpha = 0.05$ で、正規分布の母平均値に対する片側 t 検定を行う。
- ② 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が $\mu_0 = 55\text{g}$ と等しい」すなわち「 $\mu = \mu_0$ 」とする。対立仮説を「 $\mu < \mu_0$ 」とする。
- ③ サイズ n の標本の標本平均値を \bar{X} 、不偏標本分散を s^2 とするとき、検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$$

は、帰無仮説のもとで、自由度 $n - 1$ の t 分布に従う。

- ④ この標本の実現値は、 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} = \frac{53 - 55}{\sqrt{\frac{1}{5} \frac{13}{5-1}}} = -4\sqrt{5/8} = -3.16228$ 。
- ⑤ t 分布表より、棄却域は $t < t_4(0.95)$ すなわち $t < -t_4(0.05)$ すなわち $t < -2.132$ 。
- ⑥ t の実現値は棄却域に含まれるので、帰無仮説を棄却する。ドーナツの重さの母平均値は 55g より小さい、と結論する。

ここまで来たよ

13 統計的仮説検定—母平均値の両側・片側検定

14 母比率の検定・p 値・統計的仮説検定の考え方

- 母比率の (二項) 検定 (の正規近似)
- p 値=有意確率

母比率の検定 I

p と書いてた母比率, 二項分布の $B(p, n)$ の p を, 今日は r と書きます

Example (母比率の検定のアイデア)

このマジック用コインは表の出る確率 (母比率) $r = 3/5$ だと言われているが, もっと表が出る気がする。

50 回投げた (サイズ $n = 50$ のサンプル) ところ, 表 $T = 35$ 回表が出た。こんな「稀な」ことが起きるってことは, そうに違いない!

⇨ これ, 統計的仮説検定として定式化できる考え方

前提 $T \sim B(r, n)$.

帰無仮説 $r = \frac{3}{5}$, 対立仮説 $r > \frac{3}{5}$.

帰無仮説 (背理法の仮定) のもとで, $T = 35$ はとても稀 (矛盾) と言いたい。
確率統計 I(2021)L13

$$P(T = 35) = \frac{50!}{35!(50-35)!} \left(\frac{3}{5}\right)^{35} \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{50-35} = 0.04155 \quad \text{稀じゃん}$$

母比率の検定 II

ちょっと待て. 特定の回数が出ることじたい稀. 上の確率は
 $1/51 = 0.0196$ より大きい.
もっともらしい

$$P(T = 30) = \frac{50!}{35!(50-35)!} \left(\frac{3}{5}\right)^{35} \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{50-35} = 0.11456$$

だって稀じゃん?

これ (=35) 以上に極端なことが起きる確率

$$P(35 \leq T \leq 50) = \sum_{k=35}^{50} P(T = k) = 16 \text{ 個も加えるの?}$$

母比率の検定 III

正規近似による計算 確率統計 I(2021)L09

$$E[T] = 50 \cdot \frac{3}{5} = 30, V[T] = 50 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = 12.$$

中心極限定理より, '近似的に' $T \sim N(30, 12)$. $Z = \frac{T-30}{\sqrt{12}} \sim N(0, 1^2)$.

$$P(35 \leq T \leq 50) = P\left(\frac{35-30}{\sqrt{12}} \leq Z \leq +\infty\right)$$

$$= I(+\infty) - I\left(\frac{35-30}{\sqrt{12}}\right)$$

確率統計 I(2021)L08

$$= \frac{1}{2} - I(1.44) = 1 - 0.4251 = 0.0749.$$

$P(T \geq 35) = 0.0749$ (これがあとで出てくる **p 値**) が稀と思うかは主観. けんかにならないように, 計算し始める前に基準を決めておく. それが, 有意水準 $\alpha = 0.05$ or 0.01 .

母比率の検定 IV

上で出てきた, Z は, 分子分母を $n = 50$ で割ると,

$$\frac{35 - 30}{\sqrt{12}} = \frac{\frac{35}{50} - \frac{30}{50}}{\sqrt{\frac{1}{50} \frac{3}{5} \frac{2}{5}}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot r_0 \cdot (1 - r_0)}}$$

という, 母比率の区間推定の導出に似た形になる.

ただし, 平方根の中にあるのは帰無仮説の母比率 r_0 , 標本比率は \hat{r} .

一般の統計的仮説検定の, レポートや論文での書き方

確率統計 I(2021)L13

母集団を決める. 母集団の分布タイプを仮定する. 使う検定を決める/決まる (将来は自作できる).

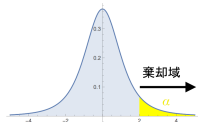
- ① 「有意水準 $\alpha = \dots$ で」「 \dots 検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
- ② 「帰無仮説を \dots とする」「対立仮説を \dots とする」
- ③ 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 Y は \dots 分布にしたがう」
- ④ 「この標本に対してナントカ検定統計量の実現値は $y = \dots$ である」
- ⑤ (棄却域の境い目の値を計算しておく)
- ⑥ 「 y 不等号 (境い目) より帰無仮説を棄却する/棄却できない」「よって母ナントカは \dots である/とはいえない」

母比率の片側(二項)検定(の正規近似)

岩薩林 確率・統計定理 7.6(p.171)

前提 $T \sim B(r, n)$.

- 有意水準 α で正規近似による母比率の片側(二項)検定を行う。
- 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$ とする。
- 帰無仮説のもとで検定統計量 $Z = \frac{T - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたがう(n 大のとき).
 $\hat{r} = \frac{T}{n}$: 標本比率, r_0 : (帰無仮説の)母比率.
- この標本に対して検定統計量の実現値は...
- 棄却域は $z > z(\alpha)$.
- 「(...)より帰無仮説を棄却する/できない. よって母比率 $r > r_0$ と結論する/できない.



帰無仮説として適切であるかどうかは、日本語の語尾「である」、「でない」だけで決まるわけではに。

帰無仮説は「 $r \neq \frac{3}{5}$ でない」、最後の文は「 $r \leq \frac{3}{5}$ でないと結論する」などとも書ける。

帰無仮説は = 的なもの。

L14-Q1

Quiz(母比率の片側検定)

あるスピードくじ(「あたり」と「はずれ」だけがある)は, あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている. しかし, 実際の r はこれより大きいのではないかと疑っている.

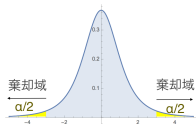
くじを 100 本ひいたところ, 15 本があたりだった.
有意水準 $\alpha = 0.05$ で母比率の検定を行おう.

岩薩林 確率・統計 例題 7.7, 問題 8(p.172), 第 7 章練習問題 2,3

母比率の両側 (二項) 検定 (の正規近似)

岩薩林 確率・統計定理 7.6(p.171)

- 有意水準 α で正規近似による母比率の両側 (二項) 検定を行う.
- 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r \neq r_0$ とする.
- 帰無仮説のもとで検定統計量 $Z = \frac{T - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたがう (n 大のとき). $\hat{r} = \frac{T}{n}$: 標本比率, r_0 : (帰無仮説の) 母比率.
- この標本に対して検定統計量の実現値は...
- 棄却域は $|z| > z(\frac{\alpha}{2})$.
- 「(...) より帰無仮説を棄却する/できない. よって母比率 $r \neq r_0$ と結論する/できない.



L14-Q2

Quiz(母比率の両側 (二項) 検定)

瀬田学舎生のうち、滋賀県の高校を卒業した人の母比率は $r = 0.4$ でないことを示すため、サイズ 68 の標本を抽出したところ、20 名が滋賀県の高校を卒業していた。 $r = 0.4$ でないことを結論できるか？

ここまで来たよ

13 統計的仮説検定—母平均値の両側・片側検定

14 母比率の検定・p 値・統計的仮説検定の考え方

- 母比率の (二項) 検定 (の正規近似)
- p 値=有意確率

p 値=有意確率による棄却する/しない判定 岩薩林 確率・統計 p.152

検定の Step6 では, T や Z が極端かどうか判定している

$T = 35 \Leftrightarrow Z = \frac{35-30}{\sqrt{12}}$ が棄却域 ($\alpha = 0.05$) に入っているか?

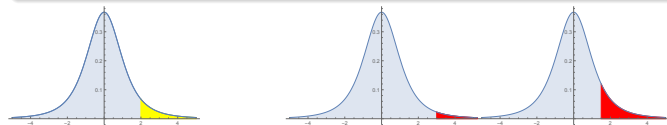
⇕

p 値 $P(T \geq 35) = P(z \geq \frac{35-30}{\sqrt{12}})$ が有意水準 α より小さいか?

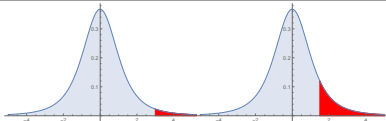
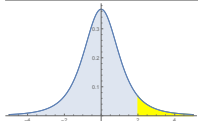
標本の p 値 (p-value)=有意確率 岩薩林 確率・統計 p.152

帰無仮説のもとで, 検定統計量がこの標本よりも極端な値をとる確率=端側の面積

$\alpha > p$ のとき帰無仮説を棄却



| 勝負 | | 棄却する/ しない | | | |
|-------|----|------------------------|-----|-----|---|
| 統計量の値 | 片側 | $+z(\alpha)$ | $<$ | $>$ | $Z = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ |
| | | $-z(\alpha)$ | $>$ | $<$ | |
| | 両側 | $+z(\frac{\alpha}{2})$ | $<$ | $>$ | $ Z = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ |
| 確率=面積 | | α | $>$ | $<$ | p 値 |



統計的仮説検定での p 値による棄却判定

- ① 有意水準 α で正規近似による母比率の片側 (二項) 検定を行う。
- ② 帰無仮説を母比率 $r = r_0$, 対立仮説を母比率 $r > r_0$,
- ③ 帰無仮説のもとで検定統計量 $Z = \frac{T - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}} = \frac{\hat{r} - r_0}{\sqrt{r_0(1-r_0)/n}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1^2)$ にしたがう (n 大のとき). \hat{r} 標本比率, r_0 (帰無仮説の) 母比率
- ④ この標本に対して検定統計量の実現値は…
- ⑤ 棄却域は $z > z(\alpha)$. p 値は $P(Z > \frac{T - nr_0}{\sqrt{nr_0(1-r_0)}})$.
- ⑥ 「(…) p 値 $< / \geq \alpha$ より帰無仮説を棄却する/できない. よって母比率 $r > r_0$ と結論する/できない.

p 値で再度やってみよう.

L14-Q1

Quiz(母比率の片側検定)

あるスピードくじ(「あたり」と「はずれ」だけがある)は, あたりの母比率 r は $\frac{1}{10}$ に等しいと言われている. しかし, 実際の r はこれより大きいのではないかと疑っている.

くじを 100 本ひいたところ, 15 本があたりだった.

有意水準 $\alpha = 0.05$ で母比率の検定を行おう.

岩薩林 確率・統計 例題 7.7, 問題 8(p.172), 第 7 章練習問題 2,3