連続型一様分布・確率変数の1次変換・標準化

樋口さぶろお https://hig3.net

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L04(2024-05-13 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2024-05-12 Sun 13:30 JST hig"

今日の目標

- 岩薩林 確率・統計 p.78 一様分布を説明できる
- scipy.stat の location と scale を説明できる
- 岩薩林 確率・統計 p.80 確率変数の標準化を説明できる

L03-Q1

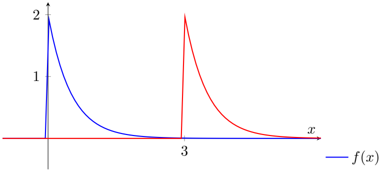
Quiz 解答: 指数分布

間隔 X 分 は, パラメタ $\lambda = 1/30$ の指数分布にしたがう.

1. $P(5 < X \leq 10) = F(10) - F(5) = \int_5^{10} \frac{1}{30} \mathrm{e}^{-\frac{1}{30}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-5/30} - \mathrm{e}^{-10/30} =.$
2. $P(X > 80) = 1 - F(80) = \int_{80}^{+\infty} \frac{1}{30} \mathrm{e}^{-\frac{1}{30}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-80/30} =.$
3. $\mathrm{E}[X^1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lambda = 30.$
4. 分位数関数は $q = F(x) = \mathrm{e}^{-x/30}$ を解いて, $x = F^{-1}(q) = -30 \log q$. よって, $-30 \log 2/3$ 分.

L03-Q2

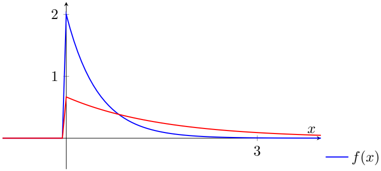
Quiz 解答: 指数分布

1. 

2. $X_1 \sim \mathrm{Exp}(2)$ より $\mathrm{E}[X_1] = 2^{-1}$.
   $\mathrm{E}[X_2] = \mathrm{E}[X_1 + 3] = \mathrm{E}[X_1] + 3 = 2^{-1} + 3$. または定積分で.

L03-Q3

Quiz 解答: 指数分布

1. 

2. $X_1 \sim \mathrm{Exp}(2)$ より $\mathrm{E}[X_1] = 2^{-1}$.
$\mathrm{E}[X_2] = \mathrm{E}[3X_1] = 3\mathrm{E}[X_1] = 3 \cdot 2^{-1}$. または $X_2 \sim \mathrm{Exp}(\frac{2}{3})$ より
$\mathrm{E}[X_2] = (\frac{2}{3})^{-1}$.

ここまで来たよ

3 指数分布・累積分布関数・分位数

4 連続型一様分布・確率変数の 1 次変換・標準化
- 連続型一様分布
- 確率変数の変数変換
- 確率変数の標準化

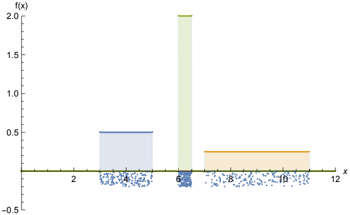
連続型一様分布 岩薩林 確率・統計 例題 4.1(p.78)

連続型一様分布は, 連続型確率変数の分布の, 名前がつくくらい有名な例.

連続型一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$

確率変数 X の確率密度関数が次で与えられるとき, X は区間 $[c,d]$ の連続型一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ に従うという.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & (c \leq x \leq d) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



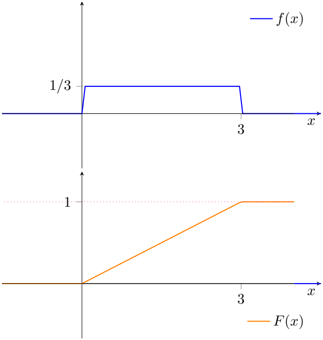
$\mathrm{U}(4,6), \mathrm{U}(6,6.5), \mathrm{U}(7,11).$

連続型一様分布 岩薩林 確率・統計 例題 4.1(p.78)

連続型一様分布

```
import scipy.stats
rvx = stats.uniform(loc=c,scale=d-c) # U(c,d)
```

Google Colab 連続型確率変数-連続型一様分布.ipynb LearnMoodle



L04-Q1

Quiz(連続型一様分布)

連続型確率変数 X が連続型一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ にしたがう.

1. モーメント $\mathrm{E}[X^k]$ を求めよう.
2. 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. 母標準偏差 $\sqrt{\mathrm{V}[X]}$ を求めよう.

$\mathrm{U}(c,d)$ に対するこの結果は, 公式のように記憶して使おう.
母平均値・母標準偏差の意味とマッチしてる?

L04-Q2

Quiz(連続型一様分布の応用)

あるおんぼろキューブアイス製造マシンから立方体の氷が, 一辺 X が 18mm 以上 20mm 以下の範囲で, 同じ確からしさで決まってランダムに出てくる.

1. X のしたがう分布を答えよう.
2. キューブアイスの一辺の長さの母期待値を求めよう.
3. キューブアイスの一辺の長さが 19.5mm 以上である確率を求めよう.
4. キューブアイスの表面積の母期待値を求めよう.
5. キューブアイスの表面積が $2000[\mathrm{mm}^2]$ 以下である確率を求めよう.
6. キューブアイスの体積の母期待値を求めよう.

ここまで来たよ

3 指数分布・累積分布関数・分位数

4 連続型一様分布・確率変数の 1 次変換・標準化

- 連続型一様分布
- 確率変数の変数変換
- 確率変数の標準化

復習: 変数変換, グラフの平行移動と拡大縮小

縦軸 p, 横軸 x, y(変換前 x, 変換後 y).
$p = f(x)$ のグラフを, p 軸を中心に横 (x 軸方向) に a 倍すると $y = ax$.
$y = f(\frac{y}{a})$.
さらに, 横 (x 軸方向) に b 平行移動すると $y = ax + b$.
$p = f(\frac{y-b}{a})$.
$p = x^2$ を，a 倍，b 平行移動したことを考えてね.

変数変換 $Y = 2X + 4$

変換前 X, 変換後 Y

$X \sim \mathrm{U}(0, 3)$

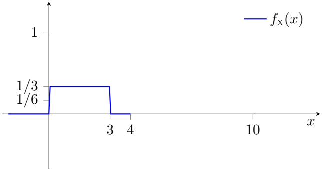
$Y = 2X + 4$, 2 倍して 4 平行移動

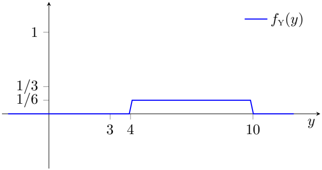
$Y \sim \mathrm{U}(4, 10)$ 一様分布のまま!

$$f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (0 \leq x \leq 3) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} & (0 \leq \frac{y-4}{2} \leq 3) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{6} & (4 \leq y \leq 10) \\ 0 & (他) \end{cases}$$





x	0	3
y	4	10

変換前 Y, 変換後 $X = \frac{Y-4}{2} = \frac{1}{2}Y - 2$ という逆の変換も考えられる

復習

変換前 X, 変換後 $Y = aX + b$.

命題 ($Y = aX + b$ の母平均値と母分散)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] =& \mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b \\
\mathrm{V}[Y] =& \mathrm{V}[aX + b] = a^2\mathrm{V}[X]
\end{aligned}
$$

これを使って，Y の母平均値母分散求められる？

母期待値の 2 つの計算方法

変換前 $X \sim \mathrm{U}(0,3)$
計算方法 1 一様分布だから…
$\mathrm{E}[X] = \frac{0+3}{2}$
$\mathrm{V}[X] = \frac{(3-0)^2}{12}$.

変換後 $Y = 2X + 4$
計算方法 1 変換後も一様分布になるから…$Y = 2X + 4$, 2 倍して 4 平行移動.
$Y \sim \mathrm{U}(4,10)$
$\mathrm{E}[Y] = \frac{4+10}{2} = 7$
$\mathrm{V}[Y] = \frac{(10-4)^2}{12} = 3$.
計算方法 2 ぜんぶ X の母期待値で書き直す
$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[2X + 4] = 2\mathrm{E}[X] + 4 = 7$.
$\mathrm{V}[Y] = \mathrm{V}[2X + 4] = 2^2\mathrm{V}[X] = 3$.

ここまで来たよ

3 指数分布・累積分布関数・分位数

4 連続型一様分布・確率変数の 1 次変換・標準化
- 連続型一様分布
- 確率変数の変数変換
- 確率変数の標準化

確率変数の標準化

定義 (標準化された確率変数 岩薩林 確率・統計 例題 4.4(p.80)**)**

確率変数 Z が, $\mathrm{E}[Z]=0, \mathrm{V}[Z]=1^2$ を満たすとき, Z は標準化された確率変数という.

任意の確率変数 X は, 1 次式で，標準化された確率変数に変換できる．
このとき，確率密度関数のグラフは，拡大，移動しただけで，形は同じ．

定義 (確率変数の標準化 岩薩林 確率・統計 例題 4.4(p.80)**)**

任意の確率変数 X に対して, $\mu=\mathrm{E}[X], \sigma^2=\mathrm{V}[X], \sigma>0$ とする.
確率変数 $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ は標準化されている.「Z は X を標準化した確率変数」という.

$\mathrm{E}[Z]=\mathrm{E}[\frac{X-\mu}{\sigma}]=\boxed{0}$,
$\mathrm{V}[Z]=\mathrm{V}[\frac{X-\mu}{\sigma}]=\boxed{1}$.

連続型一様分布の標準化

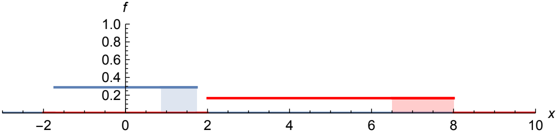
$X \sim \mathrm{U}(2,8)$ を標準化しよう.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (2 \le x \le 8) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = 5, \mathrm{V}[X] = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$ より, $Z = \frac{X-5}{\sqrt{3}}$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & (-\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

標準連続型一様分布 $Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.



x	2	8
z	$-\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$

標準一様分布

任意の連続型一様分布 $\mathrm{U}(c,d)$ を標準化すると, $\mathrm{U}(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$ になる.

確率変数の標準化とは

確率密度関数 $f_{\mathrm{Y}}(x)$ を横方向に拡大縮小して '幅' 1 にする（副産物として縦にも拡大縮小する），平行移動して平均値 '重心' の位置を 0 にすること

逆に，標準化された 変換前 Z から 変換後 $X = aZ + b$ を考えると,
$\mathrm{E}[X] = b$, $\mathrm{V}[X] = a^2$.

命題

標準化された連続型一様分布 $Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3},+\sqrt{3})$ から，$X = aZ + b$ で，すべての連続型一様分布 $X \sim \mathrm{U}(c,d)$ を作れる.

L04-Q3

Quiz(連続型一様分布)

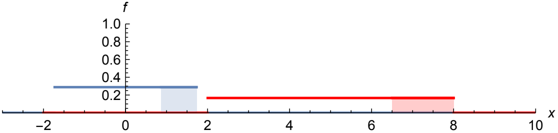
連続型確率変数 $Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ に対して, $X = \sqrt{3}Z + 5$ を考える.

1. X の確率密度関数 $f_{\mathrm{X}}(x)$ とそのグラフを答えよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

それぞれ 2 つの方法で.

確率変数の変数変換 $X = aZ + b$ の意味 岩薩林 確率・統計 標準化 (p.81)

変換前 $X \sim \mathrm{U}(0,3)$, 変換後 $Y = 2X + 4 \sim \mathrm{U}(4,10)$ の話を，
変換前 $Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{d}, +\sqrt{3})$, 変換後 $X = aZ + b$ でリプレイ．
一般に確率変数 X の確率密度関数のグラフは, Z のものを横に a 倍, 横に b 平行移動, (縦に $1/a$ 倍) 岩薩林 確率・統計 例題 4.4
左 $Z \sim \mathrm{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 右 $X = aZ + b = \sqrt{3}Z + 5 \sim \mathrm{U}(2,8)$ の確率密度関数



$$f_{\mathrm{X}}(x) = \frac{1}{a} \times f_{\mathrm{Z}}\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} \times \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & (-\sqrt{3} \leq \frac{x-b}{a} \leq +\sqrt{3}) \Leftrightarrow (-a\sqrt{3} + b \leq x < +a\sqrt{3} + b) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

対応する確率=塗った箇所の面積は同じ

$$P\left(\frac{13}{2} < X \leq 8\right) = P\left(\frac{\frac{13}{2} - 5}{\sqrt{3}} < Z \leq \frac{8-5}{\sqrt{3}}\right).$$

z	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
x	2	$\frac{13}{2}$	8