

正規母集団の母平均値の区間推定

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計Ⅰ L12(2026-07-06 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-07-19 Sun 14:28 JST hig"

今日の目標

- カイ二乗分布を説明できる 久保川 統計学入門 §8.1
- t 分布を説明できる 久保川 統計学入門 §8.1
- 正規母集団の母平均値を区間推定できる 久保川 統計学入門 §8.3



L11-Q1

L11-Q2

TA Prob and Sol: 正規分布にしたがう母集団の母平均値の区間推定（母分散既知）

確率変数 X は、母分散が $\text{Var}(X) = \sigma^2 = 3^2$ とわかっており、母平均値 $\mu = E[X]$ が不明な正規分布 $N(\mu, 3^2)$ にしたがう。 X のサイズ 4 の標本を抽出したところ次のようになった（本当は整数値になる確率は 0 だけど、計算を楽にするためのファンタジー）。

51, 52, 47, 50.

- ① 母平均値 μ を、信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう。
- ② 母平均値 μ を、信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう。

略解

- ① 標本平均値は $\bar{X} = 50$. よって, 信頼係数 0.95 の信頼区間は

$$50 - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \sqrt{\frac{3^2}{4}} < \mu < 50 + \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \sqrt{\frac{3^2}{4}}.$$

$$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = -\Phi^{-1}(0.05/2) = z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96 \text{ より}$$

$$50 - 1.96 \times \sqrt{\frac{3^2}{4}} < \mu < 50 + 1.96 \times \sqrt{\frac{3^2}{4}}.$$

すなわち, $47.06 < \mu < 52.94$.

② 同様に,

$$50 - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \sqrt{\frac{3^2}{4}} < \mu < 50 - \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \sqrt{\frac{3^2}{4}}.$$

$$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.01}{2}\right) = -\Phi^{-1}(0.01/2) = z_{\frac{0.01}{2}} = 2.58 \text{ より}$$

$$50 - 2.58 \times \sqrt{\frac{3^2}{4}} < \mu < 50 + 2.58 \times \sqrt{\frac{3^2}{4}}.$$

すなわち, $46.13 < \mu < 53.87$.

L11-Q3

L11-Q4

TA Prob and Sol: 母比率の区間推定

選挙で出口調査をしたところ、50 人中 35 人が A 候補に投票したと答えた。母集団を投票した人 2500 人とする。そのうち A 候補に投票した人の母比率 (得票率) を考える。

- ① A 候補の得票率を, (点) 推定しよう
- ② A 候補の得票率を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で区間推定しよう.
- ③ A 候補の得票率を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.

略解

A 候補に投票したを $X = 1$, しなかったを $X = 0$ とすると, 母比率を p として $X \sim \text{Ber}(p)$.

- ① 標本比率は $\hat{p} = \frac{35}{50} = 0.7$. 母比率 p を 0.7 と推定する.

- ② 母比率 p の信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ の信頼区間は,

$$\frac{35}{50} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} < p < \frac{35}{50} + \Phi^{-1}\left(\frac{0.05}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}}$$

$$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.05}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0.05}{2}\right) = z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96 \text{ より}$$

$$\frac{35}{50} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} < p < \frac{35}{50} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}}$$

$$0.7 - 0.13 < p < 0.7 + 0.13$$

$$0.57 < p < 0.83$$

0.5 < 0.57 なので、信頼係数 0.95 では当選ってことですね（放送用語「当選確実」こののりで判定を繰り返すと、20 回に 1 回に間違えるということ）

- ③ 母比率 p の信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ の信頼区間は,

$$\frac{35}{50} - \Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.01}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} < p < \frac{35}{50} + \Phi^{-1}\left(\frac{0.01}{2}\right) \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}}$$

$$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{0.01}{2}\right) = -\Phi^{-1}\left(\frac{0.01}{2}\right) = z_{\frac{0.01}{2}} = 2.58 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \frac{35}{50} - 2.58 \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} < p < \frac{35}{50} + 2.58 \times \sqrt{\frac{\frac{35}{50} \cdot (1 - \frac{35}{50})}{50}} \\ 0.7 - 0.17 < p < 0.7 + 0.17 \\ 0.53 < p < 0.87 \end{aligned}$$

L12-Q1

Quiz(標本抽出と推定)

標本抽出と推定について、正しい文に○, 誤っている文に×をつけよう.

- ① 標本比率の分母は母集団のサイズである
- ② 母集団が異なっても、標本が同じなら同じ標本平均値が得られる
- ③ 一般に、母平均値は、標本抽出のたびに異なる値になる
- ④ 標本平均値は、母平均値を推定するための不偏な推定量である
- ⑤ 不偏標本分散を計算するには、各データと母平均値との差を使う

ここまで来たよ

11 区間推定

12 正規母集団の母平均値の区間推定

- カイ二乗分布—正規分布の不偏標本分散のしたがう分布
- t 分布と母平均値の信頼区間 (正規母集団, 母分散未知)
- 母平均値の近似的信頼区間

標準正規分布から作れる分布

$Z_i \sim N(0, 1^2)$ 独立同一分布のとき,

$$2Z_1 \sim$$

$$aZ_1 + b \sim$$

$$Z_1 + Z_2 \sim$$

$$|Z_1| \sim$$

$$Z_1^2 \sim$$

$$Z_1^2 + Z_2^2 \sim$$

$$Z_1^2 + \cdots + Z_k^2 \sim$$

カイ二乗分布

久保川 統計学入門 §8.1

定義 (カイ二乗分布)

久保川 統計学入門 定義 8.1(p.170)

$Z_1, \dots, Z_k, \text{i.i.d.} \sim N(0, 1^2)$ のとき, 確率変数 $W = Z_1^2 + \dots + Z_k^2$ は, 自由度 k のカイ二乗分布 χ_k^2 にしたがう.

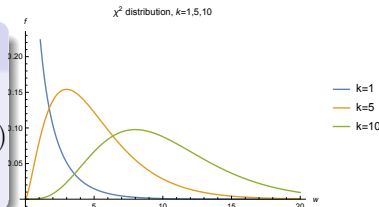
言語	小	大	読み
英語	x	X	エクス
ギリシャ語	χ	X	カイ

定義 (χ_k^2 の確率密度関数)

$$f_k(w) = \begin{cases} C_k \times w^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}w} & (w \geq 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

久保川 統計学入門 公式 8.2

$W_k \sim \chi_k^2$ に対して,
 $E[W_k] = E[Z_1^2 + \dots + Z_k^2] = k, \text{Var}(W_k) = 2k, E[(W_k)^\ell] = \text{簡単じゃない}.$



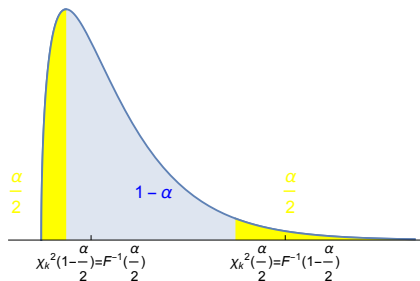
カイ二乗分布の確率密度関数と累積分布関数

```
1 | rvx2=stats.chi2(df=k) # k は自由度
```

上側確率 $\alpha/2 = P(W > \chi_{k,\alpha/2}^2)$ となる境い目 $\chi_{k,\alpha/2}^2 = F_W^{-1}(1 - \alpha/2)$.
 F はカイ二乗分布の累積分布関数.

久保川 統計学入門 数値表 p.292

χ^2 distribution, $k=3$



$\chi_{k,\alpha/2}^2$ の定義

$$\alpha/2 = P(W > \chi_{k,\alpha/2}^2).$$

$$\chi_{k,\alpha/2}^2 = F_W^{-1}(1 - \alpha/2).$$

不偏標本分散のしたがう分布

久保川 統計学入門 §8.2.2

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう母集団のサイズ n の標本

- 標本平均値の分布 $N(\mu, \sigma^2/n)$ をうまく平行移動, 拡大縮小すると標準正規分布 $N(0, 1^2)$
- 不偏標本分散の分布をうまく拡大縮小すると **カイ二乗分布** χ_k^2

命題 (不偏標本分散のしたがう分布)

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からサイズ n の標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$ を取り出すとき, 不偏標本分散

$$V^2 = \frac{1}{n-1} [(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2]$$

から定めた

$$W = (n-1) \times \frac{V^2}{\sigma^2}$$

は, **自由度** $k = n-1$ の **カイ二乗分布** χ_{n-1}^2 にしたがう.

言い換え

比 $\frac{\text{不偏標本分散}}{\text{母分散}}$ は 1 に近いところに分布するが,

実は, この比は確率変数 $\frac{W}{n-1}$. ($W \sim \chi_{n-1}^2$)

実は W は標本平均値 $\bar{X}_n$ と独立

証明じゃないけど説明

$X_1, \dots, X_n, \text{i.i.d.} \sim N(\mu, \sigma^2)$ に対して,

$$\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2$$

は自由度 n のカイ二乗分布 χ_n^2 にしたがう.

μ を $\bar{X}_n$ に替えた,

$$W = \left(\frac{X_1 - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \bar{X}}{\sigma}\right)^2$$

は自由度は $n-1$ のカイ二乗分布 χ_{n-1}^2 にしたがう.

$$W = (n-1) \times \frac{V^2}{\sigma^2}.$$

ここまで来たよ

11 区間推定

12 正規母集団の母平均値の区間推定

- カイ二乗分布—正規分布の不偏標本分散のしたがう分布
- t 分布と母平均値の信頼区間 (正規母集団, 母分散未知)
- 母平均値の近似的信頼区間

t 分布

定義 (t 分布)

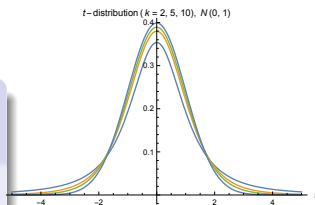
$Z \sim N(0, 1^2)$, $W \sim \chi_k^2$, Z と W が独立,
のとき連続型確率変数 $T = \frac{Z}{\sqrt{W/k}}$ のしたがう分布を自由度 k の (スチューデントの, またはゴセットの)t 分布 t_k という.

自由度 k が小さいとき, $N(0, 1^2)$ より低く広い.

自由度 $k \rightarrow +\infty$ で $N(0, 1^2)$ に一致する.

命題 (自由度 k の t 分布の確率密度関数)

$$f_k(x) = A_k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}x^2\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$



t 分布の確率密度関数と累積分布関数

久保川 統計学入門 p.291

Python `scipy.stats.t(df=k)`

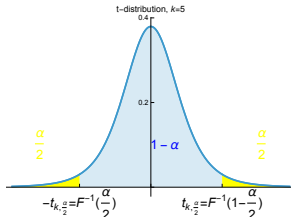
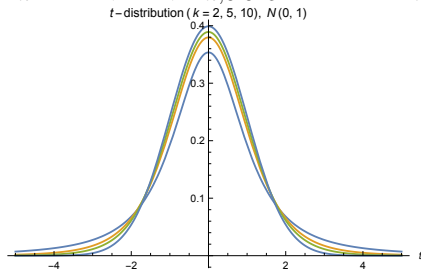
Excel `t.dist(x,k,TRUE/FALSE=累積分布/確率密度)`, `t.inv(x,k)= $F^{-1}(x)$` .

$t_{k,\alpha}$ を **上側確率** $\alpha = P(T > t_{k,\alpha})$ で定義する.

t 分布の確率密度関数は偶関数なので, $t_{k,1-\alpha} = -t_{k,\alpha}$.

付表 2 は付表 1 とフォーマットが違う

$t_k \rightarrow N(0, 1^2)$, $t_{k,0.025} \rightarrow 1.960$, $t_{k,0.005} \rightarrow 2.576$ ($k \rightarrow +\infty$).



L12-Q2

Quiz(t 分布の確率と $t_{k,\alpha}$)

標準正規分布にしたがう確率変数 $Z \sim N(0, 1^2)$ と, 自由度 $k = 40$ の t 分布にしたがう確率変数 $T \sim t_{40}$ を考える. 各分布の累積分布関数の逆関数 F_t^{-1} を使って答え, さらに数値にしよう.

- ① 確率 $P(Z > z) = 0.025$ となる z を求めよう.
- ② 確率 $P(Z > z) = 1 - 0.025$ となる z を求めよう.
- ③ 確率 $P(T > w) = 0.025$ となる w を求めよう.
- ④ 確率 $P(T > w) = 1 - 0.025$ となる w を求めよう.

母平均値の区間推定 (正規母集団, 母分散未知)

母分散既知の区間推定 確率統計 I(2026)L11 では, 標本平均値を標準化した. $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$.

ふつう, μ がわからないときは σ^2 もわかってない.

σ^2 のかわりに不偏標本分散 V^2 (確率変数) を使った, 標準化もどき

$$T = \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{V^2/n}} = \frac{\frac{\bar{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)V^2}{\sigma^2}}/(n-1)}$$

でやっちゃいたい. 分子 $\sim N(0, 1^2)$, 分母 $= \sqrt{W/(n-1)}$, $W \sim \chi_{n-1}^2$ より, $T \sim t_{n-1}$.

命題 (T の分布)

母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から, サイズ n の標本 $X_1, \dots, X_n$ を取り出したとき,

$$T = \frac{\bar{X}_{(n)} - \mu}{\sqrt{V^2/n}}$$

は, 自由度 $n-1$ の スチューデントの t 分布 にしたがう.

命題 (母平均値の信頼区間 (母分散未知)) 久保川 統計学入門 公式 8.6(2)(p.176)

(母分散未知の) 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう母集団から, サイズ n の標本を得たとき, 母平均値 μ の **信頼係数** $1 - \alpha$ の **信頼区間**は

$$\bar{X} - t_{n-1, \alpha/2} \times \sqrt{V^2/n} < \mu < \bar{X} + t_{n-1, \alpha/2} \times \sqrt{V^2/n}.$$

ただし, $\bar{X}$: 標本平均値, V^2 : 不偏標本分散, n : 標本サイズ, $t_{n-1, \alpha/2}$: 自由度 $n - 1$ の t 分布の上側確率が $\alpha/2$ となる点.

母分散既知 確率統計 I(2026)L11 と比べて, $\sigma^2 \rightsquigarrow V^2$, $z_{\alpha/2} \rightsquigarrow t_{n-1, \alpha/2}$

信頼区間が小さいとは、推測が **自分の言葉で** であること。
L12-Q3

Quiz(区間推定の性質)

標本からの母平均値の区間推定について、正しいのはどれ?

- ① 母分散が大きいほど、信頼区間は大きくなる
- ② 標本サイズが大きいほど、信頼区間は大きくなる
- ③ 母平均値が大きいほど、信頼区間は小さくなる
- ④ 信頼係数が大きいほど、信頼区間は小さくなる

標本平均値が大きい $\Rightarrow$ 信頼区間は **平行移動する**

母分散が大きい $\Rightarrow$ 信頼区間は **大きい**

標本サイズ n が大きい $\Rightarrow$ 信頼区間は **小さい**

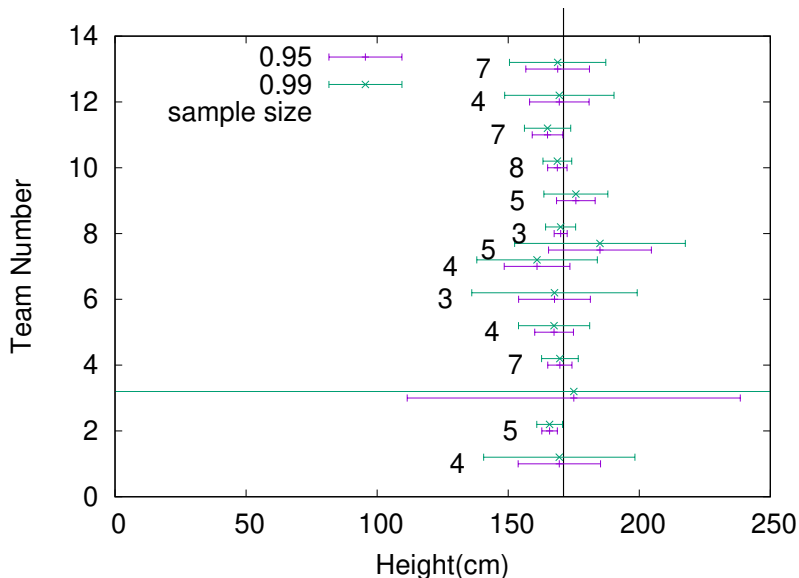
L12-Q4

Quiz(正規母集団の母平均値の区間推定)

確率変数 X は, 未知の母平均値 μ と未知の母分散 σ^2 の正規分布にしたがう. サイズ $n = 9$ の標本を抽出したところ, 標本平均値 $\bar{X} = 130$, 不偏標本分散 $V^2 = 25$ だった.

母平均値 μ を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう.

クラス 2017 の身長之母平均値の区間推定



ここまで来たよ

11 区間推定

12 正規母集団の母平均値の区間推定

- カイ二乗分布—正規分布の不偏標本分散のしたがう分布
- t 分布と母平均値の信頼区間 (正規母集団, 母分散未知)
- 母平均値の近似的信頼区間

母平均値の近似的信頼区間

標本サイズ n が大きいとき、標本平均値 $\frac{1}{n}[X_1 + \dots + X_n]$ の分布は、中心極限定理により、正規分布に近づくので、次のような近似が使える。

命題 (母平均値の近似的信頼区間 久保川 統計学入門 公式 8.10)

母平均値 μ , 母分散 σ^2 のなにかの分布にしたがう母集団の, 母平均値 μ の **信頼係数** $1 - \alpha$ の近似的の**信頼区間** (**$(1 - \alpha)$ 信頼区間**) は, n が大きいとき, $\bar{X}_n$ を標本平均値, V^2 を不偏標本分散として,

$$\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \times \sqrt{V^2/n} < \mu < \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \times \sqrt{V^2/n}.$$

$a < \mu < b$ でなく, 閉区間で $\mu \in [a, b]$ とかくこともある. 「信頼区間は $[a, b]$ 」のように答えることもある.

正規母集団のときは「 z でなく t が正確」って言ってたけど, 母集団が正規でないときは, それを気にする前段階で近似をしてしまっているので, ここでは z .

L12-Q5

Quiz(正規でない母集団の母平均値の近似的信頼区間)

あるドーナツ製造マシンが製造するドーナツの重さ X g は, ある分布にしたがう確率変数である

製造された 40 個のドーナツの重さの標本平均値は $\bar{X} = 50$ g. 不偏標本分散は $V^2 = 9$ g² だった.

- ① 母平均値 $\mu = E[X]$ の近似的信頼区間を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で求めよう. まず, $\Phi^{-1}()$, z で書き, 小数に直そう.
- ② 母平均値 $\mu = E[X]$ の近似的信頼区間を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で求めよう. まず, $\Phi^{-1}()$, z で書き, 小数に直そう.