

統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

樋口さぶろお <https://hig3.net>

龍谷大学 先端理工学部 数理・情報科学課程

確率統計 I L13(2026-07-13 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2026-07-14 Tue 09:02 JST hig"

今日の目標

- 統計的仮説検定を説明できる 久保川 統計学入門 SS9.1,9.2
- 母平均値の両側 t 検定を実行できる 久保川 統計学入門 §9.4.1



L12-Q1

TA Prob and Sol: 標本抽出と推定

標本抽出と推定について、正しい文に○, 誤っている文に×をつけよう.

- ① 標本比率の分母は母集団のサイズである
- ② 母集団が異なっても、標本が同じなら同じ標本平均値が得られる
- ③ 一般に、母平均値は、標本抽出のたびに異なる値になる
- ④ 標本平均値は、母平均値を推定するための不偏な推定量である
- ⑤ 不偏標本分散を計算するには、各データと母平均値との差を使う

略解

- ① × 標本比率の分母は標本のサイズ.
- ② ○ 標本の量 n, x_i だけで書かれている. 確かに正しいけど、あまり意味のない主張.

- ③ × 母集団を定めると母平均値は定まる. 標本平均値 $\bar{X}$ はその推定量で, 不偏 $E[\bar{X}] = \mu$ で, それ自身確率変数.
- ④ ○ 母集団を定めると母平均値は定まる. 標本平均値 $\bar{X}$ はその推定量で, 不偏 $E[\bar{X}] = \mu$ で, それ自身確率変数.
- ⑤ × 各データと標本平均値との差を使う. 母平均値がわかっていなくても不偏標本分散は求められる.

L12-Q2

TA Prob and Sol: 区間推定の性質

標本からの母平均値の区間推定について, 正しいのはどれ?

- ① 母分散が大きいほど, 信頼区間は大きくなる
- ② 標本サイズが大きいほど, 信頼区間は大きくなる
- ③ 母平均値が大きいほど, 信頼区間は小さくなる
- ④ 信頼係数が大きいほど, 信頼区間は小さくなる

略解

- ばらつきが大きいので、 $\pm\sqrt{\quad}$ の分子に入っている不偏標本分散と連動するので.
- × 正確になるので、 $\pm\sqrt{\quad}$ の分母に入っているので.
- × 平行移動するだけ. (母比率の時はもう少し微妙で $\frac{1}{2}$ の時最大)
- × 推測が当たる確率を高めるには信頼区間を大きくしておく必要がある. α が小さいと、t 分布の端を小さく切り取り、係数 $t_{k,\alpha} > 0$ は大きくなる.

L12-Q3

TA Prob and Sol:t 分布の確率と $t_{k,\alpha}$

標準正規分布にしたがう確率変数 $Z \sim N(0, 1^2)$ と, 自由度 $k = 40$ の t 分布にしたがう確率変数 $T \sim t_{40}$ を考える. 各分布の累積分布関数の逆関数 F_t^{-1} を使って答え, さらに数値にしよう.

- ① 確率 $P(Z > z) = 0.025$ となる z を求めよう.
- ② 確率 $P(Z > z) = 1 - 0.025$ となる z を求めよう.
- ③ 確率 $P(T > w) = 0.025$ となる w を求めよう.
- ④ 確率 $P(T > w) = 1 - 0.025$ となる w を求めよう.

略解

- ① $\Phi^{-1}(1 - 0.025) = \text{ppf}(1 - 0.025) = z_{0.025} = 1.960$.
- ② 標準正規分布の確率密度関数は偶関数なので,
 $\Phi^{-1}(0.025) = \text{ppf}(0.025) = z_{1-0.025} = -z_{0.025} = -1.960$.

$$\textcircled{3} F_t^{-1}(1 - 0.025) = \text{ppf}(1 - 0.025) = t_{40,0.025} = 2.021.$$

$\textcircled{4}$ t 分布の確率密度関数は偶関数なので,

$$F_t^{-1}(0.025) = \text{ppf}(1 - 0.025) = t_{40,1-0.025} = -t_{40,0.025} = -2.021.$$

L12-Q4

TA Prob and Sol: 正規母集団の母平均値の区間推定

確率変数 X は、未知の母平均値 μ と未知の母分散 σ^2 の正規分布にしたがう。サイズ $n = 9$ の標本を抽出したところ、標本平均値 $\bar{X} = 130$, 不偏標本分散 $V^2 = 25$ だった。

母平均値 μ を、信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で区間推定しよう。

略解

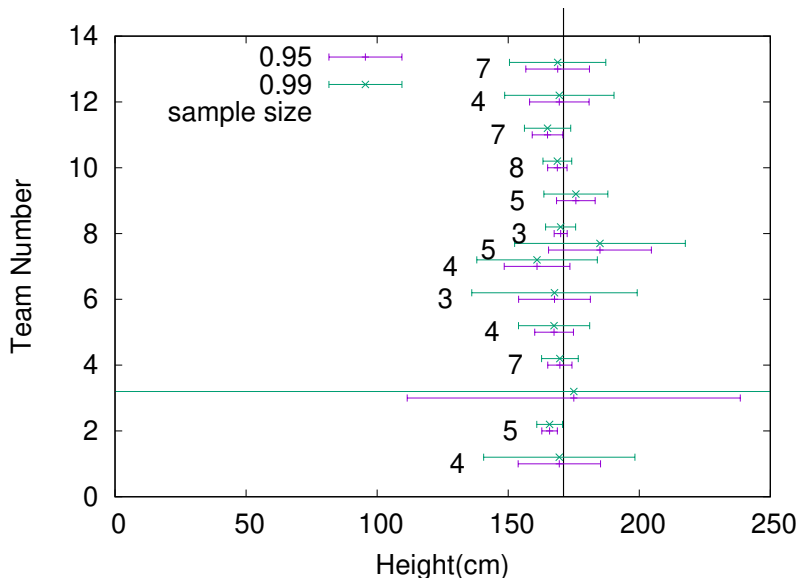
$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{V^2/9}}$ は自由度 $n-1=8$ の t 分布 t_{9-1} に従う. よって, 信頼係数 $1-\alpha=0.99$ の信頼区間は,

$$\bar{X} - F_t^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \sqrt{V^2/n} < \mu < \bar{X} - F_t^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \sqrt{V^2/n}$$

$$130 - t_{9-1,0.01/2} \times \sqrt{25/9} < \mu < 130 + t_{9-1,0.01/2} \times \sqrt{25/9}$$

$$130 - 3.355 \times \sqrt{25/9} < \mu < 130 + 3.355 \times \sqrt{25/9}$$

クラス 2017 の身長之母平均値の区間推定



L13-Q1

Quiz(母平均値の区間推定)

信頼係数と母平均値の信頼区間について、次のうち正しいものの一つを選んで○をつけよう.

- 信頼区間が 1 つ出力されたとき、母平均値がその中に含まれる確率は信頼係数に等しい
- 同じのりで区間推定を繰り返すとき、母平均値を含む信頼区間が出力される確率は信頼係数に等しい
- 信頼係数が大きいほど、出力される信頼区間の長さは小さくなる
- 出力される信頼区間は、母平均値を中央に、信頼係数から決まる上下対称の長さで広がる区間である

ここまで来たよ

12 正規母集団の母平均値の区間推定

- 母平均値の近似的信頼区間

13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

母平均値の近似的信頼区間

X の母分布が正規分布でなくても、標本平均値 $\frac{1}{n}[X_1 + \dots + X_n]$ の分布は、標本サイズ n が大きければ中心極限定理により正規分布に近づくので、次のような近似が使える。

命題 (母平均値の近似的信頼区間 久保川 統計学入門 公式 8.10)

母平均値 μ , 母分散 σ^2 のなにかの分布にしたがう母集団の、母平均値 μ の **信頼係数** $1 - \alpha$ の近似的の**信頼区間** (**$(1 - \alpha)$ 信頼区間**) は、 n が大きいとき、 $\bar{X}_n$ を標本平均値、 V^2 を不偏標本分散として、

$$\bar{X}_n - z_{\alpha/2} \times \sqrt{V^2/n} < \mu < \bar{X}_n + z_{\alpha/2} \times \sqrt{V^2/n}.$$

$a < \mu < b$ でなく、閉区間で $\mu \in [a, b]$ とかくこともある。「信頼区間は $[a, b]$ 」のように答えることもある。

正規母集団のときは「 z でなく t が正確」って言うってたけど、母集団が正規でないときは、それを気にする前段階で近似をしてしまっているの
で、ここでは z .

L13-Q2

Quiz(正規でない母集団の母平均値の近似的信頼区間)

あるドーナツ製造マシンが製造するドーナツの重さ X g は, ある分布にしたがう確率変数である

製造された 40 個のドーナツの重さの標本平均値は $\bar{X} = 50$ g. 不偏標本分散は $V^2 = 9$ g² だった.

- ① 母平均値 $\mu = E[X]$ の近似的信頼区間を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ で求めよう. まず, $\Phi^{-1}(), z$ で書き, 小数に直そう.
- ② 母平均値 $\mu = E[X]$ の近似的信頼区間を, 信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ で求めよう. まず, $\Phi^{-1}(), z$ で書き, 小数に直そう.

ここまで来たよ

- 12 正規母集団の母平均値の区間推定
 - 母平均値の近似的信頼区間

- 13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定
 - 統計的仮説検定の考え方
 - 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

推定 (estimation) と仮説検定 (test)

久保川 統計学入門 §9.1

点推定 μ は値 xx と推定 久保川 統計学入門 §7.2

区間推定 μ は値 yy と値 zz の間と推定 (信頼係数 $1 - \alpha$ で) 久保川 統計学入門 §8

仮説検定 μ は値 xx と差がある, と, (とても確信のあるときだけ) 断言 (間違う危険有意水準 α で. 「確信度」は 1 に近い $1 - \alpha$) = 見逃し多いけど発色したら正しい血痕試験紙 久保川 統計学入門 §9

あるドーナツ製造機は, 重さ X (確率変数) の母平均値が 55g であるように調整済みだという. しかし, 5 個買ってみたら, 違う感じ. これ, 本当に母平均値 55 g なの?(っていうか 55 g でないと言いたい).

ある学習法を使ってるある生徒の, 毎日のテストでの 1 か月の平均点は 63 点. 自分が別の学習法で教えた 5 日間の平均点は… 自分の方は優れていると言いたい.

検定はだいたいこんな考え方

久保川 統計学入門 §9.2

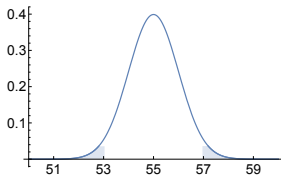
確率変数 X は、正規分布 $N(55, 2^2)$ にしたがうという. $\sigma^2 = 2^2$ は確かだとわかってるけど, $\mu = 55$ (帰無仮説) が本当なのか疑っている. **というより, 本当でないと言いたい**
サイズ 4 の標本を抽出したところ,

54, 57, 57, 60

だった. $\rightarrow$ 標本平均値 $\bar{X} = \frac{1}{4}(X_1 + \dots + X_4) = 57$.

$\bar{X} \sim N(55, 2^2/4)$.

確率 α (=有意水準) でしか起きないくらいまれな, 帰無仮説から離れたことが起きたら (検定統計量 $\bar{X}_n$ の実現値が**棄却域**に含まれるなら) おかしいと判定する (帰無仮説を**棄却する**)
棄却域は, $\bar{X}_n$ の数直線上の領域のこと (不等式で指定される), その棄却域とそれ以外の領域 (受容域) との境い目の値を**棄却限界**という.



帰無仮説と対立仮説

久保川 統計学入門 §9.2

母集団，母ナントカに対する仮説（標本に対するものではない）

- H_0 : 帰無仮説 (null hypothesis) = 背理法の仮定 = 「真の母平均値 μ は 55g に等しい」
- H_1 : 対立仮説 (alternative hypothesis) = 示したい命題 = 「真の母平均値 μ は 55g でない」

検定 (test) = 統計的仮説検定 (statistical hypothesis test)

心理学, 教育学, 社会科学などでは標本サイズを大きくできないことが多い. 小さくても Yes/No の結論を出す, 科学業界で合意された方法.

帰無仮説を棄却する reject

検定統計量の実現値が境目を越えて大きすぎたり小さすぎたりしたら (棄却域にはいたら) 帰無仮説 (= 背理法の仮説) が偽, 対立仮説が真と結論する (試験紙が発色した)

帰無仮説を受容する accept 「帰無仮説を棄却できない」

実験失敗 (背理法始めたけど矛盾導けなかった). 何も言えない (発色しな

ここまで来たよ

12 正規母集団の母平均値の区間推定

- 母平均値の近似的信頼区間

13 統計的仮説検定・母平均値の両側 t 検定

- 統計的仮説検定の考え方
- 正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

L13-Q3

Quiz(母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定)

あるドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ Xg は, 正規分布にしたがうことがわかっている. 母平均値は $55g$ だと言われていたが疑っている. きょう 5 個製造したところ, 下のようだった.

$50g, 50g, 51g, 46g, 48g$.

ドーナツ製造マシンが次々に製造するクロワッサンドーナツの重さ Xg の母平均値が $55g$ と異なるかどうか, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で統計的仮説検定を行おう.

一般の統計的仮説検定の、レポートや論文での書き方

久保川 統計学入門 p.189

母集団を決める. 母集団の分布タイプを仮定する. 使う検定を決める/決まる (将来は自作できる).

統計的仮説検定の一般的手順

- ① 「有意水準 $\alpha = \dots$ で」「 $\dots$ 検定を行う」(2,3 を名前で予告する)
- ② 「帰無仮説を $\dots$ とする」「対立仮説を $\dots$ とする」
- ③ 「帰無仮説のもとでナントカ検定統計量 Y は $\dots$ 分布にしたがう」
- ④ 「この標本に対してナントカ検定統計量 Y の実現値は $y = \dots$ である」
- ⑤ (棄却限界を計算して)「棄却域は $\dots$ 」
- ⑥ 「 $\dots$ より帰無仮説を棄却する/受容する」「よって (問に即した対立仮説の内容) と結論する/とは結論できない」

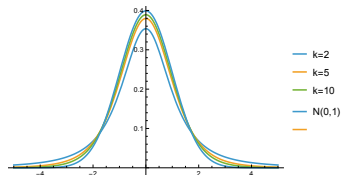
(6)「結論」の基本形は、(対立仮説) と結論する/結論できない、です。問と対立仮説の間に翻訳がはさまってる (例: 変化した) ときは、問に対する答にします。単に (対立仮説) というだけでなく、「結論」というワードを入れるのは、「心から信じてるわけではないが、統計的仮説検定の手順に従うとこうなる」というニュアンスをいれるため

復習：t 分布

確率統計 I(2025)L12

定義 (t 分布 久保川 統計学入門 定義 8.3)

$Z \sim N(0, 1^2)$, $W \sim \chi_k^2$, Z と W が独立,
 のとき連続型確率変数 $T = \frac{Z}{\sqrt{W/k}}$ のしたがう分布を自由度 k の (ス
 チューデントの, またはゴセットの)t 分布 t_k という.



命題 (T の分布 久保川 統計学入門 公式 8.4)

母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から, サイズ n の標本 $X_1, \dots, X_n$ を取り出すとき, 標本平均値 $\bar{X}_n$, 不偏標本分散 V^2 に対して

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{V^2/n}}$$

は, 自由度 $n-1$ のスチューデントの t

正規分布にしたがう母集団の母平均値の両側 t 検定

久保川 統計学入門 公式 9.4

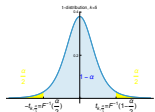
母平均値の両側 t 検定

久保川 統計学入門

前提 母集団が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう, μ, σ^2 は不明.

- ① 有意水準 α で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
- ② 帰無仮説を母平均値 $\mu = \mu_0$, 対立仮説を $\mu \neq \mu_0$ とする.
- ③ 帰無仮説のもとで, 標本サイズ n の標本から計算する検定統計量 $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{V^2/n}}$ は自由度 $n-1$ の t 分布にしたがう.
- ④ 統計検定量 T の実現値 t を標本平均値 $\bar{X}$, 不偏標本分散 V^2 の実現値から計算すると $t = \dots$.
- ⑤ 棄却限界は $C = F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$, 棄却域は $|t| > C$ である.
- ⑥ 実現値 t は棄却域に含まれる/含まれないので (結論) 帰無仮説を棄却する/受容する, (対立仮説) 母平均値は $\mu \neq \mu_0$ と結論する/できない.

棄却域は t 軸の部分集合 $(-\infty, -C) \cup (C, +\infty)$. 受容域は $[-C, +C]$. ここで C は, $P(t \in \text{棄却域}) = \alpha$ であるように, $C = F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = t_{n-1, \frac{\alpha}{2}}$ と決めた.



t 分布では $F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = -F^{-1}(\frac{\alpha}{2}) = t_{k, \frac{\alpha}{2}}$.

L13-Q3

手順で言うと, $\mu_0 = 55$ 相当.

Quiz 解答: 母平均値の両側検定 (母分散未知)=両側 t 検定

- ① 有意水準 $\alpha = 0.05$ で, 正規分布の母平均値に対する両側 t 検定を行う.
- ② 帰無仮説を「ドーナツの重さの母平均値 μ が 55g に等しい」すなわち「 $\mu = 55$ 」とする. 対立仮説を「 $\mu \neq 55$ 」とする.
- ③ サイズ $n = 5$ の標本の標本平均値を $\bar{X}$, 不偏標本分散を V^2 とするとき, 検定統計量

$$T = \frac{\bar{X} - 55}{\sqrt{V^2/5}}$$

は, 帰無仮説のもとで, 自由度 $5 - 1$ の t 分布に従う.

- ④ 検定統計量 T の実現値は,

$$t = \frac{\bar{X}-55}{\sqrt{V^2/5}} = \dots = \frac{49-55}{\sqrt{4/5}} = -3\sqrt{5} = -6.708.$$

⑤ 棄却限界は $F^{-1}(1 - \frac{0.05}{2}) = t_{4, \frac{0.05}{2}} = \text{rvt.ppf}(1 - 0.05/2) = 2.776$

より、棄却域は $|t| > 2.776$.

棄却域は、「 $t < F^{-1}(\frac{0.05}{2})$ または $F^{-1}(1 - \frac{0.05}{2}) < t$ 」とも書ける.

- ⑥ $|-6.708| > 2.776$ であり、実現値 t は棄却域に含まれるので、帰無仮説を棄却する. (対立仮説「 $\mu \neq 155$ 」と結論する. を日本語で書いて) ドーナツの重さの母平均値は 55g と異なる, と結論する.

(注: 帰無仮説の棄却のことを、業界用語「有意」 **significant** で表現する人もいる. 検定は有意である, 母平均値 μ は 55g と有意に異なる, 母平均値 μ と 55 の間には有意差がある, 有意な標本である, など)

重さは負にならないし、正規分布にしたがうというのはおかしい前提だが、ここは練習ってことで、世の中には変な状況下で強引に t 検定を使う人が多くいるが、数理の人はおかしさを認識できるように。

久保川 統計学入門 例題 9.5, 基本問題問 1.3(p.200)

L13-Q4

Quiz(正規分布の母平均値に関する t 検定)

あるコンビニには、ドーナツ販売開始前には、9:00–10:00 に平均 196 人の客が来店していた。ドーナツ販売開始後の 4 日間、来店客数は次の通りだった。204, 208, 188, 200

来店者数は正規分布にしたがうと考える。ドーナツ販売開始後に来店客数の母平均値は変化したか？ 有意水準 0.05 で考える。

ふつうじゃない Trial L13 Trial L13 は授業内非参照テストではなく、2026-07-27 月 20:00 までに Moodle で受験するテスト（受験回数制限，受験所要時間の制限あり），したがって，2026-07-20 月 1 L14 には授業内の Trial はありません．

- 練習問題 L13-01, L13-02（2026-07-27 月 09:15 締切）の両方に合格すると，TrialL13 の受験が可能になる
- TrialL13，練習問題 L13 とともに開始日時未定．2026-07-20 月 09:15 までに開始して，Teams で通知します．
- 練習問題 L14, TrialL14 は，L12 以前と同じスケジュール，フォーマットです．
- 趣旨：統計的仮説検定の全体の流れを実行できることを確かめたいが，完全な非参照，かつ短時間で実行できることまでは求めてない．したがって，通常の Trial のフォーマットが適さない／必要ない．