応用数理 II 期末試験

樋口 さぶろお*

2001 年 1 月 26 日

持ち込み不可でお願いします. 3.2(a), 3.2(b) は, それ以前の問と無関係に解けます.

1 代数方程式の摂動による解法

3 次方程式

$$x^3 + \varepsilon x - 1 = 0 \tag{1}$$

で, 摂動パラメター $\varepsilon = 0$ の時の解のひとつは, $x = 1$ である. 摂動パラメター ε が, 零ではないが十分小さいとき, この解は 1 からどのようにずれるか,

$$x = 1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots \tag{2}$$

と書いたときの x_1, x_2 を求めよ.

2 共鳴

非同次微分方程式

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \cos(\omega t) + A\cos^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) \tag{3}$$

を考える.

1. $A = 0, \omega \neq \omega_0$ とする. 特解を求め, その振幅が $\omega \to \omega_0$ で発散することを示せ.
2. $A = 0, \omega = \omega_0$ とする. 特解が, 永年項 ($t \sin \omega t$ のような時間とともに発散する項) を含むことを示せ.
3. $\omega = \omega_0$ とする. 解に永年項が現れないためには, 係数 A をどうとればよいか.

* hig@math.ryukoku.ac.jp

3　接合漸近展開法と境界層

摂動パラメターが $\varepsilon \ll 1$ であるとき, 微分方程式

$$\varepsilon\ddot{x}(t)+(1+\varepsilon)\dot{x}(t)+x(t)=0, \qquad x(0)=0, x(1)=\exp(-1) \tag{4}$$

を考える.

1. (a) 素朴に,

   $$x(t)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\cdots \tag{5}$$

   と摂動展開して, (4) から, $x_0(t), x_1(t)$ に対する微分方程式を求めよ.

   (b) $x_0(t)$ についての微分方程式を解け.

   (c) 上で求めた $x_0(t)$ に, 境界条件 $x(1)=\exp(-1)$ を課して積分定数を決定せよ. もし仮に, さらに境界条件 $x(0)=0$ を課すと矛盾が生じることを示せ.

2. 上のような矛盾が生じたのは, 実は, $0<t\lesssim\varepsilon$ に境界層がある (この領域で, $\dot{x}(t)\sim\varepsilon^{-1}$ となっている) ためである. 上で求めた解は, 境界層の外でだけ正しい外部解である. そこで次に, 境界層の中で正しい解 (内部解) を考える.

   (a) 変数を, $\tau=t/\varepsilon$ に取り直す. τ での微分を $'=\frac{d}{d\tau}$ と書くと, 微分方程式 (4) は

   $$x''+(1+\varepsilon)x'+\varepsilon x=0 \tag{6}$$

   と書き換えられることを示せ.

   (b) (6) を摂動法で扱って (このとき, x, x', x'' は ε^0 程度の量と考える)

   $$x(t)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\cdots \tag{7}$$

   と摂動展開したときの $x_0(t)$ を求めよ.

   (c) 上で求めた $x_0(t)$ に, 境界条件のうち, $x(0)=0$ だけを課して, 積分定数をひとつだけ決定せよ (もうひとつの積分定数は未定でよい).

3. $t=\varepsilon^0$ と $t=\varepsilon^1$ の中間の領域で 2 つの解が一致するという条件

   $$\lim_{\varepsilon\to 0}\text{外部解の } x_0(t=\sqrt{\varepsilon})=\lim_{\varepsilon\to 0}\text{内部解の } x_0(t=\sqrt{\varepsilon}) \tag{8}$$

   を課して, 内部解に残った積分定数を決定せよ.

4. 外部解, 内部解から, $0\le t\le 1$ で意味のある解を求めよ.