応用数理II 期末試験略解

樋口 さぶろお*

2001 年 1 月 26 日

1　代数方程式の摂動による解法

$$
\begin{aligned}
3x_1+1&=0 &(1)\\
3x_2+3x_1^2+x_1&=0 &(2)
\end{aligned}
$$

より, $x_1=-1/3, x_2=0$.

2　共鳴

1. $x(t)=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t$. 極限 $\omega\to\omega_0$ で (振幅) $=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\to\infty$.
2. 特解は $x(t)=\frac{1}{\omega_0}t\sin\omega_0 t$.
3. 条件

$$
\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}\exp(\pm i\omega_0 t)(\text{右辺})dt=0 \tag{3}
$$

より, $A=-2$. このとき, $\cos\omega_0 t+A\cos^2(\omega_0 t/2)=-1$ となることからもわかる.

*hig@math.ryukoku.ac.jp

3　接合漸近展開法と境界層

1. (a)

$$\dot{x}_0 + x_0 = 0,$$
$$\ddot{x}_0 + \dot{x}_1 + \dot{x}_0 + x_1 = 0$$

   (b) $x_0(t) = C\exp(-t)$.

   (c) $C = 1$. すると $x_0(0) = 1$ となり矛盾.

2. (a) $\frac{d}{dt} = \varepsilon^{-1}\frac{d}{d\tau}$ より示せる.

   (b) $x_0(t)$ に対する方程式は

$$x_0'' + x_0' = 0 \tag{7}$$

   これを解いて, $x_0 = D\exp(-\tau) + E = D\exp(-t/\varepsilon) + E$.

   (c) $E = -D$.

3.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \text{外部解の } x_0(t = \sqrt{\varepsilon}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \exp(-\varepsilon) = 1. \tag{8}$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \text{内部解の } x_0(t = \sqrt{\varepsilon}) = D(\exp(-\sqrt{\varepsilon}/\varepsilon) - 1) = -D. \tag{9}$$

よって, $D = -1$.

4.

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{外部解の } x_0(t) + \text{内部解の } x_0(t) - [\lim_{\varepsilon\to 0} \text{外 (内) 部解の } x_0(t = \sqrt{\varepsilon})] + \cdots \\ &= \exp(-t) - \exp(-t/\varepsilon) + \cdots. \end{aligned} \tag{10}$$