応用数理II

樋口 さぶろお*

2000年11月17日

6 今週の quiz

6.1 Poincaré-Lindstedt の方法 + Fourier 級数変換の練習

授業では,

$$\phi(\tau) = -A^3 \cos^3 \tau + \frac{2\omega_1 A}{\omega} \cos \tau \tag{1}$$

が $\cos\tau$ に比例する項を含まないように, すなわち永年項が出ないように, という条件から, 三角関数の公式

$$\cos^3 \tau = \frac{1}{4} \cos 3\tau + \frac{3}{4} \cos \tau \tag{2}$$

を用いて

$$\omega_1 = \frac{3}{8} A^2 \omega \tag{3}$$

と決定した.

しかし, $\phi(\tau)$ がこのような簡単な形でない場合には, 三角関数の公式を使って, $\cos\tau$ に比例する項を求めることはできない.

だが, そのような場合も, Fourier 級数変換を用いれば, (原理的には), 永年項が現れないための条件が求められる. これを, 試してみよう.

*hig@math.ryukoku.ac.jp

関数 $\phi(\tau)$ は, 周期 2π を持つので, ある $c_n \in \mathbb{C}$ によって,

$$-A^3\cos^3\tau + \frac{2\omega_1 A}{\omega}\cos\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\tau} \tag{4}$$

と Fourier 級数展開される.

1. c_1 を求めよ.

Hint. Fourier 級数変換

$$c_n = \int_0^{2\pi} d\tau \phi(\tau) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-in\tau} \tag{5}$$

を用いる. 積分は, $\cos\tau = (e^{i\tau} + e^{-i\tau})/2$ と変形すると楽にできる.

2. $c_1 = 0$ となるようにすれば, 永年項は現れない ($c_{-1} = 0$ も必要だが, $c_1 = 0$ ならば自動的に $c_{-1} = 0$ となる). そこで, 条件 $c_1 = 0$ から ω_1 を決定せよ.