応用数理IIレポート問題 略解

樋口 さぶろお[*]

2001 年 1 月 19 日

1 線型非同次微分方程式

同次方程式の一般解は

$$x(t) = A\exp(it) + B\exp(-it). \tag{1}$$

次に, 非同次方程式の特解を探す. $\cos^2(2t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4t)$ に注意すると,

$$x(t) = C + D\cos(2t) + E\cos(4t) \tag{2}$$

の形の特解があるはず. 代入して,

$$\{-4D\cos(2t) - 16E\cos(4t)\} + \{C + D\cos(2t) + E\cos(4t)\} = \frac{1}{2} + 2\cos(2t) + \frac{1}{2}\cos(4t) \tag{3}$$

したがって, $C = \frac{1}{2}, D = -\frac{3}{2}, E = -\frac{1}{30}$. よって非同次方程式の一般解は

$$x(t) = A\exp(it) + B\exp(-it) + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cos(2t) - \frac{1}{30}\cos(4t). \tag{4}$$

初期条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ を満たすためには $A = B = \frac{3}{5}$. すなわち,

$$x(t) = \frac{6}{5}\cos(t) + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cos(2t) - \frac{1}{30}\cos(4t). \tag{5}$$

[*] hig@math.ryukoku.ac.jp

2　摂動による代数方程式の解

解を

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots \tag{6}$$

と展開する. 方程式に代入して,

$$(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^5 + \varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots) + 1 = 0. \tag{7}$$

ε の 0 次の係数を比較して,

$$x_0^5 + 1 = 0 \tag{8}$$

題意より, 以下, 5 つの解のうち, $x_0 = -1$ について考える. ε の 1,2 次の係数を比較して,

$$\varepsilon^1)\quad 5x_0^4 x_1 + x_0 = 0, \tag{9}$$

$$\varepsilon^2)\quad 5x_0^4 x_2 + 10x_0^3 x_1^2 + x_1 = 0. \tag{10}$$

順に解いて x_1, x_2 を決定して,

$$x = -1 + \frac{1}{5}\varepsilon + \frac{1}{25}\varepsilon^2 + \cdots \tag{11}$$

3　摂動による微分方程式の解

3.1　講義の要約

略.

3.2　摂動による微分方程式の解

$$x(t) = x^0(T_0, T_1) + \varepsilon x^1(T_0, T_1) + \cdots \tag{12}$$

とおく.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial T_1} \tag{13}$$

に注意すると, 微分方程式は,

$$\begin{aligned}(x^0_{00}+2\varepsilon x^0_{01}+\varepsilon^2 x^0_{11})+\varepsilon(x^1_{00}+2\varepsilon x^1_{01}+\varepsilon^2 x^1_{11})+\cdots)\\ +\varepsilon(x^0_0+\varepsilon x^0_1+\varepsilon(x^1_0+\varepsilon x^1_1)+\cdots)^3+(x^0+\varepsilon x^1+\cdots)=0.\end{aligned} \tag{14}$$

ただし, $x^0_1=\partial x^0/\partial T_1$ など. ε の各次数を比較して,

$$\varepsilon^0)\quad x^0_{00}(T_0,T_1)+x^0(T_0,T_1)=0, \tag{15}$$

$$\varepsilon^1)\quad 2x^0_{01}(T_0,T_1)+x^1_{00}(T_0,T_1)+(x^0_0(T_0,T_1))^3+x^1(T_0,T_1)=0. \tag{16}$$

(15) を解いて,

$$x^0(T_0,T_1)=A(T_1)\exp(iT_0)+A^*(T_1)\exp(-iT_0). \tag{17}$$

(16) に代入して,

$$x^1_{00}(T_0,T_1)+x^1(T_0,T_1)=-2x^0_{01}(T_0,T_1)-(x^0_0(T_0,T_1))^3 \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&=-2i(A'(T_1)\exp(iT_0)-A^{*\prime}(T_1)\exp(iT_0))\\ &\quad-(iA(T_1)\exp(iT_0)-iA^*(T_1)\exp(iT_0))^3\end{aligned} \tag{19}$$

永年項が現れないための条件は,

$$\int_0^{2\pi} dt(\text{右辺})\exp(\pm iT_0)=0 \tag{20}$$

すなわち,

$$-2iA'(T_0)-3i^3A^2(T_1)(-A^*(T_1))=0, \tag{21}$$

$$+2iA^{*\prime}(T_0)-3i^3A(T_1)(-A^*(T_1))^2=0. \tag{22}$$

$A(T_1)=R(T_1)\exp(i\theta(T_1))(R(T_1),\theta(T_1)\in\mathbb{R})$ とおくと,

$$2(R'(T_1)+R(T_1)i\theta'(T_1))+3R(T_1)^3=0, \tag{23}$$

実部虚部それぞれをとって

$$2R(T_1)\theta'(T_1)=0,\qquad 2R'(T_1)+3R(T_1)^3=0. \tag{24}$$

したがって,

$$\theta(T_1)\equiv\theta_0, R(T_1)=(C+3T_1)^{-1/2}, (\theta_0, C:\text{定数}) \tag{25}$$

初期条件 $x^0(0)=1, x^0_0(0)=0$ より, $C=4, \theta_0=0$ で,

$$x^0(T_0,T_1)=2(4+3T_1)^{-1/2}\cos(T_0) \tag{26}$$

$$x(t)=x^0(t,\varepsilon t)+\cdots=2(4+3\varepsilon t)^{-1/2}\cos(t)+\cdots \tag{27}$$