微積分♪演習 (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2006-10-26 Wed 更新: Time-stamp: "2006-12-14 Thu 07:55 JST hig"

$i \in \mathbb{C}$ は虚数単位, $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ です.

4 複素平面とオイラーの公式

薩摩 p.13-15, 薩摩 p.35

4.1 お奨め問題

略解

1. $z_1 = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}i} = \mathrm{e} \cdot (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}i$. よって, $\mathrm{Re}\, z_1 = \frac{\mathrm{e}}{2}, \mathrm{Im}\, z_1 = -\frac{\sqrt{3}\mathrm{e}}{2}$.
2. $|z_2| = \sqrt{(+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \mathrm{Arg}\, z_2 = \frac{7}{4}\pi$.
3. $$(z_2)^{-10} = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)^{-10} = \frac{1}{2^5}\mathrm{e}^{\frac{10}{4}\pi i} = \frac{1}{32} \cdot \mathrm{e}^{+2\pi i} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{4}\pi i} = \frac{i}{32}. \tag{4.1}$$
   $\mathrm{Re}((z_2)^{-10}) = 0, \mathrm{Im}((z_2)^{-10}) = \frac{1}{32}$.
4. $$z_1 \cdot z_2 = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}i} \times \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\pi i} = \sqrt{2}\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\pi i}. \tag{4.2}$$
   $|z_1 \times z_2| = \sqrt{2}\mathrm{e}$, $\mathrm{Arg}(z_1 \times z_2) = +\frac{17}{12}\pi$.
5. $$z_1 + z_2 = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\sqrt{3}\mathrm{e}}{2}i + (1 - i) \tag{4.3}$$
   より, $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}\mathrm{e} + 1, \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e} - 1$.
6. $z_3 = 0 - i = 1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi i}$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), tel: 0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

4.2　オイラーの公式

略解

1. 0.
2. $(1+(1-i)x)\mathrm{e}^{(1-i)x}$.
3. $\sqrt{2}\mathrm{e}^x$.
4. $\frac{1}{2}((2+3i)^{100}\mathrm{e}^{(2+3i)x}+(2-3i)^{100}\mathrm{e}^{(2-3i)x})$.
5. $z^{-100}=\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{2\pi i\cdot 16+\frac{4}{3}\pi i}=\mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi i}$. $\mathrm{Re}\,z^{-100}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-100}$, $\mathrm{Im}\,z^{-100}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-100}$.

4.3　実部, 虚部, 絶対値, 偏角

略解

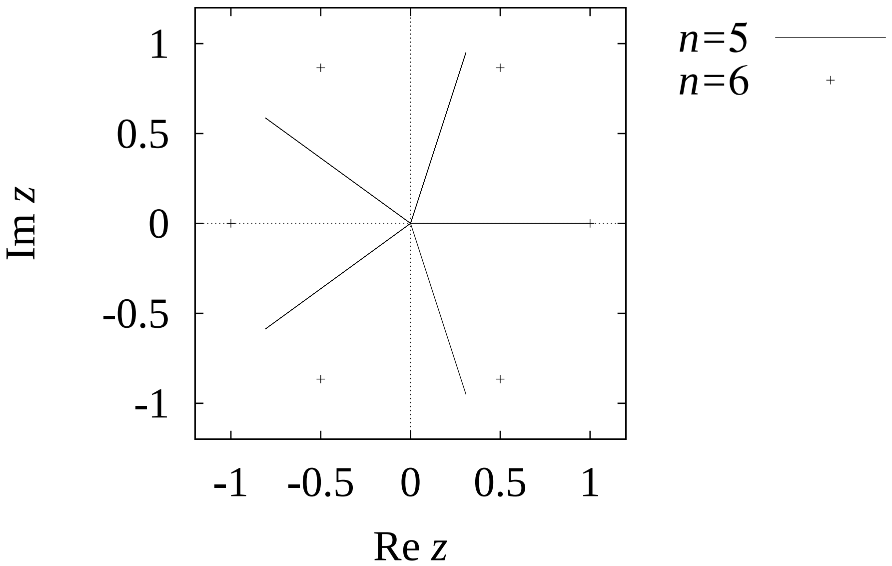
1. $|z|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$, $\tan(\mathrm{Arg}\,z)=\frac{\sqrt{3}}{1}$ より $\mathrm{Arg}\,z=\frac{\pi}{3}$.
2. $z=\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}i}=\mathrm{e}^2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}\mathrm{e}^2}{2}+i\cdot\frac{\mathrm{e}^2}{2}$.
3. $z=2+0\cdot i=2\mathrm{e}^{0i}$.

4.4　チャレンジ問題: ドモアブルの公式

略解

1. 正しい式 $\mathrm{e}^{in\theta}=(\mathrm{e}^{i\theta})^n$ の両辺を, オイラーの公式を用いて $\sin,\cos$ で表せばよい.
2. 3 倍角の公式は $\cos 3\theta=-3\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta$, $\sin 3\theta=-\sin^3\theta+3\cos^2\theta\sin\theta$. 他の形もあります.
3. $\left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi m}{n}i}\right)^n=(\mathrm{e}^{2\pi i})^m=1^m=1$.

4.



5. $z = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}i}$ とおく. 等比級数の公式より, 問題の和は,

$$\sum_{m=0}^{n-1} z^m = \frac{1-z^n}{1-z} = 0. \tag{4.4}$$