計算科学☆演習 II 計算科学☆演習 II プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2013-06-05 Wed 更新: Time-stamp: "2013-06-06 Thu 10:54 JST hig"

計算科学☆演習 II プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

離散的確率変数 R は

値 $R=-1$ を確率 $\frac{1}{3}$ で
値 $R=0$ を確率 $\frac{5}{12}$ で
値 $R=+2$ を確率 $\frac{1}{4}$ で

とる.
一方, 以下は, この確率変数のサイズ 5 のサンプルである.

$$-1,0,2,2,2$$

1. 母平均値 $\mathrm{E}(R)$ を求めよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}(R)$ を求めよう.

2

離散的確率変数 R は

値 $R=-1$ を確率 $\frac{1}{3}$ で
値 $R=0$ を確率 $\frac{5}{12}$ で
値 $R=+2$ を確率 $\frac{1}{4}$ で

とる.
一方, 以下は, この確率変数のサイズ 5 のサンプルである.

$$-1,0,2,2,2$$

1. 標本平均値 $\overline{R}$ を求めよう.
2. 標本分散 s_R^2 を求めよう.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

3

過程不要

ランダムウォークを表す次の数列を考える.

$$X_{t+1} = X_t + R_{t+1}, \qquad X_0 = 0.$$

ただし, R_{t+1} は

確率 $\frac{2}{3}$ で $R_{t+1} = -2$
確率 $\frac{1}{3}$ で $R_{t+1} = +1$

の値をとる. このとき $\mathrm{E}(R_{t+1}) = -1, \mathrm{V}(R_{t+1}) = 2$ である.

1. 時刻 $T = 100$ における座標 X_T の母平均値を求めよう.
2. 時刻 $T = 100$ における座標 X_T の母標準偏差を求めよう.

4

4.1

過程不要

次のうち, オイラー表現 (u[x], P(x,t) のような表現) について正しい文をすべて選ぼう.

1. ランダムウォーカーが何人かいるとき, ウォーカー A が $x = 1$ で B が $x = 2$ と, ウォーカー A が $x = 2$ で B が $x = 1$ とを区別することはできない
2. オイラー表現は, シューティングゲームでは, 自分の動かす機体や敵ボスキャラなど, 少数のキャラクターの位置を表現するのに適している
3. オイラー表現は, 座標の値が実数 (double) であるような場合にも使える
4. 拡散方程式はランダムウォークのオイラー表現と関係が深い (ラグランジュ表現よりも)
5. オイラー表現では, 特定の場所にウォーカーがいるかどうかを判定するのが簡単である

4.2

過程不要

確率変数の母平均, 母分散, 母標準偏差について, 次のうち正しいものをいくつでも選ぼう.

1. 母平均は, 母分布の '重心' の位置を表す
2. 母平均は, 標本全体の和をサンプルサイズで割ったものに等しい
3. 母分散は, 母分布の '重心' の位置を表す
4. 母分散の平方根は, 母分布の '幅' を表す
5. 母標準偏差は, 確率を表す

5

$\boxed{\text{過程不要}}$

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=5$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない)

する.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $P(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

6

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $P(x,t)$ が

漸化式 $P(x,t+1) = \frac{2}{5}P(x+1,t) + \frac{3}{5}P(x-2,t)$

初期条件 $P(x,0) = \begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

を満たす.
生成関数 $Z(\lambda,t) = \displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x,t)$ を考える. ここで λ はパラメタ.

1. 生成関数 $Z(\lambda,t)$ の満たす漸化式と初期条件を求めよう.
2. 生成関数 $Z(\lambda,t)$ の具体的な形を求めよう.

7

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率を $P(x,t)$ とする.
生成関数 $Z(\lambda,t) = \displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x,t)$ が,

$$Z(\lambda,t) = (\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2\lambda} + \tfrac{2}{3}\mathrm{e}^{2\lambda})^t \mathrm{e}^{-3\lambda}$$

であるとする

1. 時刻 $t=2$ において, ウォーカーが $x=-7$ にいる確率を求めよう.
2. 時刻 t における座標 X_t の母平均値 $\mathrm{E}(X_t)$ を求めよう.

8

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=0$ に $x=0$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない)

ものとする.
時刻 $t=2$ に, $x=1$ にランダムウォーカーがいる確率を求めよう.

9

連続型確率変数 R は確率密度関数

$$p(r) = \begin{cases} \frac{8}{3} & (-1/4 \leq r < 0) \\ 1/3 & (1 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を持つ. $|R| < 1$ となる確率を求めよう.

10

過程不要

連続型確率変数 R は確率密度関数

$$p(r) = \begin{cases} 2 & (7/8 \leq r < 1) \\ 1/4 & (1 \leq r < 4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

を持つ. この確率密度関数に従う乱数を, $[0,1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で生成したい.
関数 $g(y)$ を求めよう.
注: プログラムでなく関数 $g(y)$ だけ答えればいい.

計算科学☆演習 II 計算科学☆演習 II プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2013-06-05 Wed 更新: Time-stamp: "2013-06-06 Thu 10:54 JST hig"

配点 計 100 点.

1

1. $\mathrm{E}(R) = \frac{1}{6}$.
2. $\mathrm{V}(R) = \mathrm{E}(R^2) - (\mathrm{E}(R))^2 = \frac{4}{3} - (\frac{1}{6})^2 = \frac{47}{36}$.

配点 1:4 点, 2:6 点.

講評 2 は, 定義をそのまま使うより $\mathrm{E}(R^2) - (\mathrm{E}(R))^2$ のほうが楽だと思います.

2

1. $\overline{R} = \frac{1}{5}(-1 + 0 + 2 + 2 + 2) = 1$.
2. $s_R^2 = \frac{1}{5-1}((-1-1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2) = 2$.

配点 1:3 点, 2:7 点.

講評 1. では, ほとんどの人が, 標本ナントカは母分布 (確率) じゃなく標本から計算するって w わかっているのに, 2. に行くと確率を混ぜて使っちゃう人がけっこういるのはなぜ?

(確率 − 標本平均値)^2 とか, 値 × 確率^2 とかやっちゃう人が一定数いるけど, 値の単位が m なら分散の単位は m^2, って考えれば間違いに気づけるはず.

3

1. $100 \cdot (-1) = -100$.
2. $\sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

配点 1,2:各 5 点.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

4

4.1

1,4,5

4.2

1,4

配点　1,2:各 5 点.

講評　サイコロを使っても 5 点くらいは得られることを考えると，ここの正解率は低いです… このような問題に正解できることはかなり重要だと考えています．次回は半分くらい選択肢問題にしようかな.

5

$$P(x,t+1)=\frac{1}{7}\times P(x-2,t)+\frac{2}{7}\times P(x,t)+\frac{4}{7}\times P(x+1,t),\qquad P(x,5)=\begin{cases}1 & (x=2)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$

配点　漸化式 7 点, 初期条件 3 点.

講評　$x\pm\Delta x$ が逆になってるような答案はなかった．さすが.

6

1. 両辺に $\mathrm{e}^{\lambda x}$ をかけて和をとり

$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda x}P(x,t+1)=\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda(x+1)}P(x+1,t)+\frac{3}{5}\mathrm{e}^{+2\lambda}\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda(x-2)}P(x-2,t).$$

よって漸化式は

$$Z(\lambda,t+1)=(\tfrac{2}{5}\mathrm{e}^{-\lambda}+\tfrac{3}{5}\mathrm{e}^{2\lambda})Z(\lambda,t)$$

また, 初期条件は, 定義から

$$Z(\lambda,0)=\cdots+0+\mathrm{e}^{2\lambda}\times 1+0+\cdots=\mathrm{e}^{2\lambda}.$$

2. 等比数列なので

$$Z(\lambda,t)=\mathrm{e}^{+2\lambda}(\tfrac{2}{5}\mathrm{e}^{-\lambda}+\tfrac{3}{5}\mathrm{e}^{2\lambda})^t$$

配点　漸化式 5 点, 初期条件 3 点, 一般項 2 点.

講評　パターンで憶えておけば一般項をいきなり書くこともできるでしょうが, この問では, P の漸化式から出発して, ジャンプのない数学的過程の記述を求めています.

漸化式と言ったときは, $Z_{t+1} = f(Z_t)$ のような形である必要があります.

7

1. $Z(x,2) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-7\lambda} + \frac{4}{9}\mathrm{e}^{-3\lambda} + \frac{3}{9}\mathrm{e}^{\lambda}$. $\mathrm{e}^{-7\lambda}$ の係数が求める確率で, $\frac{1}{9}$.
2. $$\mathrm{E}(X_t) = \frac{\partial}{\partial\lambda} Z(\lambda,t)\big|_{\lambda=0} = -3 + \frac{2}{3}t.$$

配点　1:5 点, 2:係数 3 点, 定数項 2 点.

講評　この生成関数から漸化式 (確率) や初期条件をリバースエンジニアリングで求めて, そこから 8 ののりで確率, 3 ののりで期待値を求めることもできますが, 本当に正しい過程を書こうとするとたいへん. 過程ちゃんと考えないでやると, $x = 3$ からスタートするのを忘れそうになる. $\mathrm{E}(X_t) = t\mathrm{R}$ は $X_0 = 0$ のときの話で, 平行移動して考えれば一般には, $\mathrm{E}(X_t) = x_0 + t\mathrm{R}$ です.

$P(x,t)$ は $\mathrm{e}^{\lambda x}$ の係数, とか, $\frac{\partial}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=0}$ で母平均値, とかを形式的に使うと, 上の結果は正しく出てくる.

8

1 回だけ $+2$ 移動, 1 回だけ -1 移動する場合なので,

$${}_2\mathrm{C}_1 \times \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{4}{7} = \tfrac{8}{49}$$

配点　10 点.

講評　1. もちろん, 5–7 をリピートすれば一般の $P(x,t)$ が求まって, それも正解ですが, 今は $t = 2, x = 1$ に限定した問なので, $P(x,t)$ の表の必要なところだけ作ったり, 2 項係数を計算したりするのが速いでしょう.

9

$$\int_{-1}^{1} p(r)\,\mathrm{d}r = \int_{-1/4}^{0} \tfrac{8}{3}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}.$$

配点　10 点

講評　$|R| > 1$ を求めてるように見える答案が一定数あったんだけどなぜ? r と R の間で混乱した? r は定まった値を保持する変数, R は確率変数を表しますが, 問題が発生するまでは同じものと思っていいです.

10

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{7}{8} & (0 \leq y < \frac{1}{4}) \\ 4y & (\frac{1}{4} \leq y < 1) \end{cases}$$

配点　y の場合分け 2 点. 区間の式各 4 点.

講評　直前の回の演習の問題そのものです.

　この次にやる内容のことを考えると, 仕組みを納得しておいてもらいたいけど, 問題に正解するだけならパターンを憶えておくだけでもできちゃいそうな問.