計算科学☆演習 II 計算科学☆演習 II ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2013-07-31 Wed 更新: Time-stamp: "2013-08-03 Sat 10:08 JST hig"

計算科学☆演習 II ファイナルトライアル参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

次の確率密度関数 $p(r)$ に従う連続型確率変数 R が, $0 \leq R \leq 2$ を満たす確率を求めよう.

$$p(r) = \begin{cases} \frac{3}{26}r^2 & (1 \leq r < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

2

次の確率密度関数 $p(r)$ に従う連続型確率変数 R の, 母分散 $\mathrm{V}(R)$ を求めよう.

$$p(r) = \begin{cases} \frac{1}{\log 3} \cdot \frac{1}{r} & (1 \leq r < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

3

次の確率密度関数 $p(r)$ に従う連続値擬似乱数 R を, 逆変換法で生成したい.

$$p(r) = \begin{cases} -\frac{3}{2}r + \frac{1}{4} & (-1 \leq r < 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

関数 `double getrandom(double y)` を定めて ($g(y)$ を定めて), `getrandom(getuniform())` の返り値 ($r = g(y)$) が $p(r)$ に従うようにしよう. ただし, `double getuniform()` は $[0, 1)$ 一様乱数 Y を返す関数.

4

ある確率変数のサイズ5のサンプルを作ったところ, 次の様になった.

$$102, 98, 102, 94, 104$$

母平均値を推定し, 95% 信頼区間を求めよう. $\sqrt{2} = 1.41, \sqrt{3} = 1.73, \sqrt{5} = 2.24.$

5

あるランダムウォークが, ある条件を満たす確率を, 確率シミュレーションによって調べた.

サイズ 100 のサンプルを作ったところ, 90 について条件が成立した.

1. 条件を満たす確率 (母比率) の信頼係数 99% の信頼区間を求めよう.
2. 信頼係数 99% の信頼区間の長さが 0.02 となるためには, サンプルサイズはどの程度の大きさであればよいと考えられるか答えよう.

6

母平均値 3, 母分散 2^2 の正規分布 $\mathrm{N}(3, 2^2)$ に従う連続型確率変数 R を考える. $R < 0$ となる確率を求めよう.

7

$\boxed{\text{過程不要}}$

母平均値 -1, 母分散 $(\frac{1}{2})^2$ の正規分布 $\mathrm{N}(-1, \frac{1}{2}^2)$ に従う確率変数 X を考える.

1. 確率密度関数 $p(x)$ の式を書こう.
2. 確率密度関数 $p(x)$ のグラフを描こう.

8

連続値確率変数 $R_1, \ldots, R_9$ は, 互いに独立で, 同じ確率分布に従う. R_t の母平均値は $\mathrm{E}(R) = 2$, 母分散は $\mathrm{V}(R) = \frac{4}{9}$ である.

確率変数 $X = R_1 + \cdots + R_9$ が

$$X > 16$$

となる確率を, 中心極限定理を利用して, 近似的に求めよう.

9

ワンタンの皮製造マシーン爆速 1 号は, 一辺の長さが R の正方形の皮を, 小麦粉を原料として, 1 分間に 4 枚製造することができる. ただし, R は連続型確率変数で, 次の確率密度関数 $p(r)$ を持つ.

$$p(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (4 \leq r < 6) \\ 0 & (\text{他} \end{cases}.$$

このマシーンで製造される皮の面積 Q が, 26 以下である確率を求めよう (小数に直さなくてよい).

10

連続型確率変数 R は, 確率密度関数

$$p_{\mathrm{R}}(r) = \begin{cases} \frac{3}{64} r^2 & (0 \leq r < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

確率変数 Q を

$$Q = 3\sqrt{R}$$

で定める. Q の確率密度関数 $p_{\mathrm{Q}}(q)$ を求めよう.

$\boxed{\text{おしまい}}$

$\boxed{\text{標準正規分布の上側確率の表 (略)}}$

計算科学☆演習 II 計算科学☆演習 II ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2013-07-31 Wed 更新: Time-stamp: "2013-08-03 Sat 10:08 JST hig"

配点 10 問各 10 点. 計 100 点.

1

$$\int_0^2 p(r)\,\mathrm{d}r = \int_1^2 \frac{3}{26} r^2\,\mathrm{d}r = \frac{7}{26}.$$

配点 正しい被積分関数 5 点, 正しい積分範囲 5 点.

2

$$\mathrm{E}(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} r\, p(r)\,\mathrm{d}r = \int_1^3 \frac{1}{\log 3}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{\log 3}.$$

$$\mathrm{E}(R^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} r^2\, p(r)\,\mathrm{d}r = \int_1^3 \frac{1}{\log 3}\, r\,\mathrm{d}r = \frac{4}{\log 3}.$$

$$\mathrm{V}(R) = \mathrm{E}(R^2) - (\mathrm{E}(R))^2 = \frac{4}{\log 3}\left(1 - \frac{1}{\log 3}\right).$$

配点 $\mathrm{E}(R), \mathrm{E}(R^2)$ の定義と計算各 2 点. $\mathrm{V}(R)$ の定義と計算各 1 点.

3

$$g(y) = \frac{1}{6}(1 - (49 - 48y)^{1/2})$$

```
double getrandom(double y){ return (1-sqrt(49-48*y))/6; }
```


hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net (講義のページもここからたどれます), へや: 1 号館 5 階 502.

配点　累積分布関数 $F(r)$ 2 点, $g(y)$ 8 点.

講評　この問だったら平方完成でも 2 次方程式の解の公式でもいい.
r について解くとき, y はただの定数, と強く信じることのできなかった人が一定数いたのが残念.

4

標本平均は 100. 標本分散は 16. よって, 95%信頼区間は,

$$(100 - 1.96 \times \sqrt{16/5}, 100 + 1.96 \times \sqrt{16/5})$$

すなわち,

$$(96.5, 103.5)$$

配点　標本平均値 1 点, 標本分散 4 点, 区間 5 点.

5

1.
$$(0.90 - 2.58\sqrt{0.9 \cdot 0.1/100}, 0.90 + 2.58\sqrt{0.9 \cdot 0.1/100})$$
すなわち
$$(0.82, 0.98)$$

2. $100 \times (0.0774 \times 2/0.02)^2 = 100 \times 7.74^2 = 5991$ よりサイズ 6000 程度必要.

配点　1:7 点 (p 点, $p(1-p)$ 3 点, $/n$ 3 点), 2:3 点.

講評　確率とか比率とかなのに, 100 とか負の数とかになって平気ではいけない. 過去問になくても, ‘出題計画’ で出すって事前に言った問題は出すんだよ.

6

標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に従う連続型確率変数 Z に移って考えると, $Z = \frac{R-3}{2}$ よって, $R < 0$ は $Z < -1.5$. 上側確率の表より, 求める確率は $1 - \Phi(1.50) = 0.0668$.

配点　$Z = 1.5$ に 5 点, 結果に 5 点.

講評　図を描いて, 斜線のここ, って分かってる人が多くてすばらしい. なのに, こんなに小さい部分の確率が 0.93 とかなって怪しまないってのはちょっと警戒がたりないんじゃない?

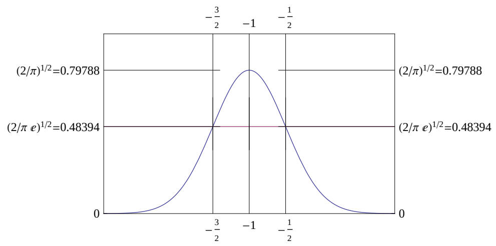
7

$\boxed{\text{過程不要}}$

1.

$$p(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-2(x+1)^2}$$

2.



配点　1:5 点, 2:5 点 (形, $|x| \to +\infty$, 横方向の位置, 縦方向の高さ, 分布の幅 各 1 点),

講評　2 では, 横軸, 縦軸のどこかに数値がはいっていて, 母平均値, 母分散が正しく使われてることがわからないといけない.

$x = -\frac{1}{2}$ では 60%くらいに, $x = 0$ では 5%くらいに落ちてるはず. それらしく描いてね (それか数値を入れておけば図が下手なだけと思ってもらえる).

8

X の母平均値は $\mu = 2 \times 9 = 18$. X の母分散は $\sigma^2 = \frac{4}{9} \times 9 = 4$. よって, 標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1)$ に従う Z でいうと, $Z > (16 - 18)/\sqrt{4} = -1$ となる確率を求めればよい.

よって確率は

$$\Phi(1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = 1 - 0.1587 = 0.8413$$

配点　母平均値 2 点, $Z = -1$ 2 点, $\Phi(1)$ 2 点, 結果 4 点.

9

皮の面積 $Q \leq 26$ であるためには, 皮の一辺の長さ $R \leq \sqrt{26}$ が必要十分. よって確率は,

$$\int_0^{\sqrt{26}} p(r)\,\mathrm{d}r = \int_4^{\sqrt{26}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{26} - 4}{2}.$$

配点　10 点.

講評　演習のほうでちょうど対応する課題があったと思うよ. Q の確率密度関数を求めて積分するより, ぜんぶ R で考えたほうが楽.

10

$$p_{\mathrm{R}}(r)\,\mathrm{d}r = p_{\mathrm{Q}}(q)\,\mathrm{d}q$$

と,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} = \frac{2}{9}q$$

より,

$$p_{\mathrm{Q}}(q) = \begin{cases} (\frac{q}{6})^5 & (0 \leq q < 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

配点　$p(r)\,\mathrm{d}r$ 不変 2 点, $p(r)$ の変換 2 点, $\mathrm{d}r$ の変換 2 点, 結果 2 点, 範囲と場合分け 2 点.

講評　演習のほうでちょうど対応する課題があったと思うよ.