ランダムウォークの座標の平均値と分散

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II　L04(2013-05-01 Wed)

今日の目標

1. ランダムウォークの座標の母平均値・母分散・母標準偏差を計算できる
2. C と Excel でランダムウォークの座標の標本平均値・標本分散・標本標準偏差を計算できる
3. C でランダムウォークに関する確率を推定するプログラムを書ける

http://hig3.net

ここまで来たよ

Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. $\mu = \mathrm{E}(R_{t+1}) = (-1)\cdot\frac{5}{9} + 0\cdot\frac{1}{9} + (+1)\cdot\frac{3}{9} = -\frac{2}{9}$.
2. $\mathrm{E}((R_{t+1})^2) = (-1)^2\cdot\frac{5}{9} + 0^2\cdot\frac{1}{9} + (+1)^2\cdot\frac{3}{9} = \frac{8}{9}$. $\mathrm{E}(R_{t+1})^2 = (-\frac{2}{9})^2$.
   $\sigma^2 = \mathrm{V}(R_{t+1}) = \mathrm{E}((R_{t+1})^2) - \mathrm{E}(R_{t+1})^2 = \frac{68}{81}$.
   次のように直接に計算しても同じ結果になる.
   $\mathrm{V}(R_{t+1}) = \mathrm{E}((R_{t+1}-\mu)^2) =$
   $((-1)-(-\frac{2}{9}))^2\cdot\frac{5}{9} + (0-(-\frac{2}{9}))^2\cdot\frac{1}{9} + ((+1)-(-\frac{2}{9}))^2\cdot\frac{3}{9}$.
3. $\sigma_{R_{t+1}} = \sqrt{\frac{68}{81}} = \frac{2\sqrt{17}}{9}$.
4. 一般に $\mathrm{E}(X_T) = T\cdot\mathrm{E}(R_{t+1})$. $T = 20$ とすると,
   $\mathrm{E}(X_{20}) = 20\mathrm{E}(R_{t+1}) = -\frac{40}{9}$.
5. 一般に $\mathrm{V}(X_T) = T\cdot\mathrm{V}(R_{t+1})$. $T = 20$ とすると,
   $\mathrm{V}(X_{20}) = 20\mathrm{V}(R_{t+1}) = \frac{1360}{81}$.
6. $\sigma_{X_{20}} = (\mathrm{V}(X_{20}))^{1/2} = (\frac{1360}{81})^{1/2}$

ここまで来たよ

ランダムウォーカーの座標の母分布

$$X_{t+1} = X_t + R_{t+1}, \quad X_0 = 0$$

1 歩分の母分布

$R = X_1$	確率	サイコロの目
0	$q = 1 - p = \frac{1}{3}$	1,2
1	$p = \frac{2}{3}$	3,4,5,6

ベルヌーイ試行

2 歩分の母分布

X_2	確率	R_1, R_2
0	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$0, 0$
1	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$0, 1$ or $1, 0$
2	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$1, 1$

$\mathrm{E}(X_2) = \boxed{}$

$\mathrm{V}(X_2) = \boxed{}$

ランダムウォーカーの座標の平均値と分散

母期待値をいきなり計算する方法

$$X_{t+1} = X_t + R_{t+1}, \quad X_0 = 0$$

ということは

$$X_T = 0 + \sum_{t=1}^{T} R_t.$$

ここで, R_t $(t = 1, 2, \ldots, T)$ は独立同分布, $\mathrm{E}(R_t) = \mu, \mathrm{V}(R_t) = \sigma^2$ とする.

X_T の母平均値

$$\mathrm{E}(X_T) = \mathrm{E}\left(\sum_{t=1}^{T} R_t\right) = \sum_{t=1}^{T} \mathrm{E}(R_t) = T \times \mu_R.$$

直観的解釈: $\boxed{}$

X_T の母分散 R_t が互いに独立なので

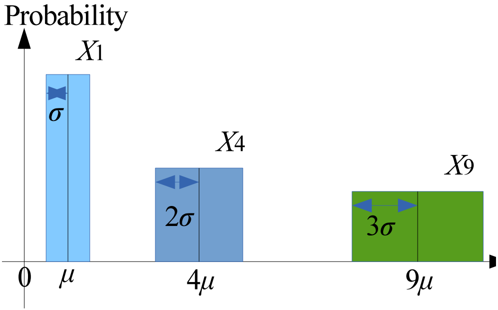
$$\mathrm{V}(X_T) = \mathrm{V}\left(\sum_{t=1}^{T} R_t\right) = \sum_{t=1}^{T} \mathrm{V}(R_t) = T \times \sigma_R^2.$$

直観的解釈: $\boxed{}$

X_T の母標準偏差

$\sigma = \boxed{}$

ってことは, ヒストグラムの時間変化はこんな感じ?



いつでもこんな長方形? 待て中心極限定理

Quiz(離散的なランダムウォークの確率・平均・分散・標準偏差)

ランダムウォークを表す次の数列を考える.

$$X_{t+1} = X_t + R_{t+1}, \qquad X_0 = 0.$$

ただし, R_{t+1}

確率 p で $R = -3$
確率 $1-p$ で $R = +1$

は

の値をとる $(0 < p < 1)$. 次のうち正しいものの記号をすべて答えよう.

1. X_t は t に比例する.
2. X_t の母平均は t に比例する.
3. e^{X_t} の期待値は t に比例する.
4. X_t の母分散は t に比例する.
5. X_t の母標準偏差は t に比例する.

ランダムウォーカーの座標の標本分布

擬似乱数を使ってサイズ N の標本 $X_T^{(1)}, X_T^{(2)}, \ldots, X_T^{(N)}$ を作りたい.
いきなり生成する `getrandomT(double y)` を書くのはたいへん…
時間発展 (=漸化式) そのまま計算しちゃえ →

```
                                    /*1*/
for(n){
                                    /*2*/
  for(t){
                                    /*3*/
    x=x+getrandom(getuniform());
                                    /*4*/
  }
                                    /*5*/
}
                                    /*6*/
```

問: `srand(seed)`, `x=0`, `printf("\%d",x)` はどこ?

ここまで来たよ

確率シミュレーション

確率的法則を, 擬似乱数を使ってそのままコンピュータ上で再現して,

- 何かの母期待値
- 何かの母分布 $\leftarrow$ 確率

を推定すること.

母期待値 $\mathrm{E}(f(X_T))$ を推定するには, 標本期待値

$$\overline{f(X_T)} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(X_T^{(n)})$$

を使う.

課題 rw6, rw7 で作る表

$X_t^{(n)}$

t:

(n):

	$t=0$	$t=1$	$\cdots$	$t=T$
$n=1$	$X_0^{(1)}$	$X_1^{(1)}$	$\cdots$	$X_T^{(1)}$
$n=2$	$X_0^{(2)}$	$X_1^{(2)}$	$\cdots$	$X_T^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n=N$	$X_0^{(N)}$	$X_1^{(N)}$	$\cdots$	$X_T^{(N)}$

これを `printf` する for の構造は?

ここまで来たよ

確率の推定

母期待値の推定はわかった．母分布 $\leftarrow$ 確率を推定するには?

例題

$x = 10$ から出発したランダムウォーカーが, $t = 20$ で, 領域 $x \leq 0$ に到達する確率は?

確率の推定

'A が成立する確率' の推定値$=\dfrac{N \text{ のうち 'A が成立している' 試行の個数}}{\text{サンプルサイズ } N}$

これは, 次の $f(X_T)$ の標本期待値とも思える.

$$f(X_T) = \begin{cases} 1 & X_T \text{ に対して A が成立} \\ 0 & X_T \text{ に対して A が成立しない} \end{cases}$$

```
                                        /*1*/
for(n){
                                        /*2*/
  for(t){
                                        /*3*/
    x=x+getrandom(getuniform());
                                        /*4*/
  }
                                        /*5*/
}
                                        /*6*/
```

例題

$x = 10$ から出発したランダムウォーカーが, $0 \leq t \leq 20$ のいずれかの瞬間に, 領域 $x \leq 0$ にいる確率

- これまで: サンプルは到着点 X_T を集めたもの
- この例: サンプルは経路 $(X_0, X_1, \ldots, X_t, \ldots, X_T)$ を集めたもの

ここまで来たよ

ラグランジュ表現: ウォーカーが $g=2$ 人いたら?

例題

$x=0,10$ から出発した $g=2$ 人のランダムウォーカーが, $0\leq t\leq 20$ の期間に衝突する (=同時刻に同地点にいることが 1 回以上起きる) 確率は?

`int x;` $\rightarrow$ `int x[2];`

```
                                   /*1*/
for(n){
                                   /*2*/
  for(t){
                                   /*3*/
    x=x+getrandom(getuniform());
                                   /*4*/
  }
                                   /*5*/
}
                                   /*6*/
```

Quiz(確率シミュレーション)

ランダムウォークを表す次の数列を考える.

$$X_{t+1} = X_t + R_{t+1}, \qquad X_0 = 0.$$

$t = 0$ に $x = 0$ から出発するランダムウォーカーが, $t = 20$ に $x = 0$ に戻ってきている確率を, 標本を作ることによって推定してその推定値を出力するプログラムを書こう.
ただし, R_{t+1} は整数値をとる確率変数で, `int getrandom(getuniform())` の返り値として実現されている.
答の記述では, `getrandom`, `getunifrom` の宣言や定義は省略すること (すでに使える状態にあると思ってよい). ユーザは乱数のシードのみを入力する.

予習復習問題これからは毎週

- 金 11:05 締切の予習復習問題は RaMMoodle `http://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle` → 計算科学 II(講義) でやってね.
- 水 13:30 締切の予習復習問題は C-learning `http://asp.c-learning.jp/s/` でやってね.
- 連休プチテスト対応. 実際に締切があるのは, 2013-05-08 水 (C-learning), 2013-05-15 水 (C-learning), そのあとふつう.

プチテスト演習のプチテストやります! 2013-05-10 金 2. 案内参照. 出題計画 (って範囲がそれくらいしかない) hist1, rw1, rand2. 数値だけ変えた, よりは変化は大きい予定.

自宅で演習の課題をやろう Visual Studio には Express Edition という '無料版' があります. 数理情報学科の学生は DreamSpark 経由で Visual Studio 製品を自宅で使えます.
`https://www.a.math.ryukoku.ac.jp/dreamspark/`