$P(x,t)$ の生成関数 $Z(\lambda,t)$

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L06(2013-05-15 Wed)

今日の目標

1. $P(x,t)$ の漸化式と初期条件から, $Z(\lambda,t)$ の漸化式と初期条件が求められる.
2. $Z(\lambda,t)$ の漸化式と初期条件から, $Z(\lambda,t)$ が求められる.
3. $Z(\lambda,t)$ から, $P(x,t)$ が求められる.
4. $Z(\lambda,t)$ から, 母期待値 $\mathrm{E}(f(X_T))$ が求められる.

`http://hig3.net`

ここまで来たよ

1. 確率 $P(x,t)$ によるランダムウォークの表現
   - Quiz 解説
2. $P(x,t)$ の生成関数 $Z(\lambda,t)$
   - 確率 $P(x,t)$ の復習
   - 生成関数の定義
   - $Z(\lambda,t)$ の初項
   - $P(x,t)$ を回復
   - $Z(\lambda,t)$ を用いた期待値の計算

Quiz 解答:$P(x,t)$ の意味 $P(x,t)$ の定義は, 時刻を t[秒] に決めたとき, ウォーカーが位置 x[m] にいる確率. すべての可能性のある場所 x に加えると, 全事象の確率で 1 になる.

Quiz 解答:ラグランジュ表現とオイラー表現

1. 6 羽なのでサイズは 6.
   各要素は, `x[]={1,1,3,3,3,8};` (順序はこうとは限らない)
2. 座標が $x=0,1,2,\ldots,9$ の計 10 点なので, サイズは 10.
   各要素は `u[]={0,2,0,3,0,0,0,0,1,0};` (順序はこうである必要).

Quiz 解答:$P(x,t)$ の漸化式

$$P(x,t+1) = pP(x+2,t)+qP(x+1,t)+(1-p-q-r)P(x,t)+rP(x-2,t).$$

```
unext[x]=p*u[x+2]+q*u[x+1]+(1-p-q-r)*u[x]+r*u[x-2];
```

ここまで来たよ

1. 確率 $P(x,t)$ によるランダムウォークの表現
    - Quiz 解説
2. $P(x,t)$ の生成関数 $Z(\lambda,t)$
    - 確率 $P(x,t)$ の復習
    - 生成関数の定義
    - $Z(\lambda,t)$ の初項
    - $P(x,t)$ を回復
    - $Z(\lambda,t)$ を用いた期待値の計算

確率 $P(x,t)$ の復習

確率 $P(x,t)$

x: 座標 (整数), t: 時刻 (整数)
定義 $P(x,t)$ とは, 時刻 t に, ウォーカーが x にいる確率.
性質 $\displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} P(x,t) = 1. \quad (t : 任意)$

$t \backslash x$	$\cdots$	-1	0	1	2	$\cdots$	x	$\cdots$
0	0	0	1	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$
1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\cdots$	0	$\cdots$
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$\vdots$								
t							$P(x,t)$	
$\vdots$								

ここまで来たよ

1. 確率 $P(x,t)$ によるランダムウォークの表現
   - Quiz 解説
2. $P(x,t)$ の生成関数 $Z(\lambda,t)$
   - 確率 $P(x,t)$ の復習
   - 生成関数の定義
   - $Z(\lambda,t)$ の初項
   - $P(x,t)$ を回復
   - $Z(\lambda,t)$ を用いた期待値の計算

生成関数 $Z(\lambda,t)$ の定義

例

$X_{t+1} = X_t + R_{t+1}$, $R =$

R	確率
-1	$q = 1-p$
$+1$	p

, $X_0 = 10$ のとき, $P(x,t)$ の漸化式と初期条件は,

$$P(x,t+1) = pP(x-1,t) + qP(x+1,t), \qquad P(x,0) = \begin{cases} 1 & (x = 10) \\ 0 & (x \neq 10) \end{cases}.$$

$P(x,t)$ の一般項を求めたい.
高校での数列 $a_{t+1} = Aa_t + B$ と比べる

と $\boxed{}$

誰かの思いついた超絶技巧 漸化式の両辺に

1. $\mathrm{e}^{\lambda x}$ をかける
2. x について加える

つまり, $\boxed{}$

$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x,t+1) = p \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x-1,t) + q \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x+1,t).$$

$$\text{生成関数 } Z(\lambda,t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\cdot x} P(x,t).$$

数列を ‘関数’ にパッケージしたもの.

ところで, Z, λ ってなに? $Z(0,t) = 1$

ラグランジュの未定乗数みたいなもの. x が体積なら λ は圧力みたいなもの. Z 変換.

微積分, 理論物理 B, パターン情報処理

左辺 $= Z(\lambda, t+1)$ そのもの

右辺第 1 項も Z で書きたい! そのままじゃだめ.

同様に, 右辺第 2 項は,

$= q\mathrm{e}^{-\lambda}Z(\lambda,t).$

結局, 漸化式は,

$$Z(\lambda,t+1) = (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})Z(\lambda,t)$$

あれっ

ただの じゃん.

ある意味 '対角化'

線形代数

公式から,

$$Z(\lambda,t) = (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t \times Z(\lambda,0)$$

ここまで来たよ

1. 確率 $P(x,t)$ によるランダムウォークの表現
   - Quiz 解説
2. $P(x,t)$ の生成関数 $Z(\lambda,t)$
   - 確率 $P(x,t)$ の復習
   - 生成関数の定義
   - $Z(\lambda,t)$ の初項
   - $P(x,t)$ を回復
   - $Z(\lambda,t)$ を用いた期待値の計算

$Z(\lambda,t)$ の初項

$$P(x,0)=\begin{cases}1 & (x=10)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases} \rightsquigarrow Z(\lambda,0)=\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}P(x,0)=\mathrm{e}^{\lambda\cdot 10}=\mathrm{e}^{10\lambda}$$

結局

$$Z(\lambda,t)=\mathrm{e}^{10\lambda}(p\mathrm{e}^{+\lambda}+q\mathrm{e}^{-\lambda})^{t}$$

Quiz($P(x,t)$ の意味)

次のうち, 生成関数 $Z(\lambda,t)$ について正しいものをいくつでも答えよう.

1. $Z(\lambda,t)$ の λ の単位は m である.
2. $Z(\lambda,t)$ の λ の単位は 1/m である.
3. $Z(\lambda,t)$ の λ の単位は秒である.
4. $Z(\lambda,t)$ の単位は秒である.
5. $Z(\lambda,t)$ の単位は 1/秒である.
6. $Z(\lambda,t)$ は単位のない数である.

Quiz(生成関数)

原点 $x=0$ から出発し, 各時間ステップ t で確率 $\frac{3}{9}$ で x から $x+1$ に, 確率 $\frac{5}{9}$ で x から $x-1$ に移動, 確率 $\frac{1}{9}$ で x にとどまるような, ペンギンのランダムウォークを考える.
時刻 t に, x にペンギンがいる確率を $P(x,t)$ とする.

1. 生成関数 $Z(\lambda,t)=\displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x}P(x,t)$ の満たす漸化式と, 初項を求めよう.
2. 生成関数 $Z(\lambda,t)$ を求めよう.
3. 生成関数を展開して, $P(1,2)$ を求めよう.

ここまで来たよ

1. 確率 $P(x,t)$ によるランダムウォークの表現
   - Quiz 解説
2. $P(x,t)$ の生成関数 $Z(\lambda,t)$
   - 確率 $P(x,t)$ の復習
   - 生成関数の定義
   - $Z(\lambda,t)$ の初項
   - $P(x,t)$ を回復
   - $Z(\lambda,t)$ を用いた期待値の計算

$P(x,t)$ を回復

ここ，今まで通り，$X_0 = 10$ でもできるんだけど，計算複雑だから，
$X_0 = 0$ としてやります．
$Z(\lambda,t) = \mathrm{e}^{0\lambda}(p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t$.
作戦 1
$Z(\lambda,t) = (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t$.
$P(2,4)$ は $\mathrm{e}^{2\lambda}$ の係数.
$()^t = ()^4$ の部分から $(\mathrm{e}^{\lambda})^2$ くるはず．展開してヒットな項を探すと，

$\boxed{}$

$P(2,4) = \boxed{}$

2 項係数

t 個から k 個を選ぶ場合の数.

$$ {}_t\mathrm{C}_k = \binom{t}{k} = \frac{t!}{k!(t-k)!} $$

作戦 2

2 項定理

$$(a+b)^t = \sum_{k=0}^{t} {}_t\mathrm{C}_k a^k b^{t-k}$$

$$\begin{aligned} Z(\lambda,t) =& (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t \\ =& \sum_{k=0}^{t} {}_t\mathrm{C}_k p^k q^{t-k} \mathrm{e}^{\lambda(k-(t-k))} = \sum_{k=0}^{t} \mathrm{e}^{\lambda(2k-t)} {}_t\mathrm{C}_k p^k q^{t-k} \end{aligned}$$

$Z(\lambda,t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda\cdot x)} P(x,t)$ と比較すると, $x = 2k - t.\ \ k = (t+x)/2$

$$\begin{aligned} P(x,t) =& Z(\lambda,t) \text{ に現れる } \mathrm{e}^{\lambda x} \text{ の係数} = {}_t\mathrm{C}_{(t+x)/2} p^{t+x/2} q^{(t-x)/2} \\ =& \frac{t!}{\left(\frac{t+x}{2}\right)!\left(\frac{t-x}{2}\right)!} p^{(t+x)/2} q^{(t-x)/2} \end{aligned}$$

解釈

x から出発して, t 回のうち,

- $+1$ 方向に $(t+x)/2$ 回,
- -1 方向に $(t-x)/2$ 回,

移動するなら x に到着.
確率の積 $p^{t+x/2}q^{(t-x)/2}$
± 1 の並べ方 ${}_t\mathrm{C}_{(t+x)/2}$ 通り.

$t\backslash x$	$\cdots$	-1	0	1	2	$\cdots$	x	$\cdots$
0	0	0	1	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$
1	0	q	0	p	0	$\cdots$	0	$\cdots$
2	q^2	0	$2pq$	0	p^2	$\cdots$	0	$\cdots$
$\vdots$								
t							$P(x,t)$	
$\vdots$								

Quiz(2 項分布でかける $P(x,t)$)

時刻 $t=0$ に原点 $x=0$ から出発し, 各時間ステップ t で確率 p で x から $x+1$ に, 確率 $q=1-p$ で x から $x-1$ に移動するランダムウォークを考える.

1. $t=2$ に到達する可能性のある位置 x とその確率を求めよう.
2. $t=4$ に到達する可能性のある位置 x とその確率を求めよう.
3. $t=10$ に $x=0$ に戻ってくる確率を求めよう.

ここまで来たよ

1. 確率 $P(x,t)$ によるランダムウォークの表現
   - Quiz 解説
2. $P(x,t)$ の生成関数 $Z(\lambda,t)$
   - 確率 $P(x,t)$ の復習
   - 生成関数の定義
   - $Z(\lambda,t)$ の初項
   - $P(x,t)$ を回復
   - $Z(\lambda,t)$ を用いた期待値の計算

$Z(\lambda,t)$ を用いた期待値の計算

例 $\mathrm{E}(X_t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x \times P(x,t)$

$Z(\lambda,t)$ の式の形が (上のように漸化式を解いて) わかってるとする.

上の $\mathrm{E}(X_T)$ の定義は $Z(\lambda,t) = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x,t)$ に似てるけど,

- x 足りない.
- $\mathrm{e}^{\lambda x}$ がじゃま

また誰かの思いついた超絶技巧

$$\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} Z(\lambda,t) = \left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x,t)\right|_{\lambda=0}$$

$$= \left.\sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{\lambda x} P(x,t)\right|_{\lambda=0} = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} xP(x,t)$$

$Z(\lambda,t)$ からの期待値の計算

一般に期待値は,

$$\mathrm{E}(f(X_t)) = f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) Z(\lambda,t)\Big|_{\lambda=0}$$

$Z(\lambda,t)$ は親玉みたいなもの

計算例 平均値 $f(x) = x$.

$\mathrm{E}(X_t) =$

答え合わせ まえにやったんだった.

$X_0 = 0$ なら, $\mathrm{E}(X_t) = t \times \mathrm{E}(R)$.

予習復習問題これからは毎週

- 金 11:05 締切の予習復習問題は RaMMoodle `http://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle` → 計算科学 II(講義) でやってね.
- 水 13:35 締切の予習復習問題は RaMMoodle `http://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle` → 計算科学演習 II でやってね.
- RaMMoodle にはスマートフォンからもアクセスできます. `http://hig3.net` > Links > RaMMoodle.

演習のプチテスト採点方針春のプチテスト算入 (15+30+35), 非算入 (0+37+43) の大きい方で評価.

講義のプチテスト延期します! 都合により, 2013-06-05 水 3 に延期します.

自宅で演習の課題をやろう Visual Studio には Express Edition という '無料版' があります. 数理情報学科の学生は DreamSpark 経由で Visual Studio 製品を自宅で使えます.
`https://www.a.math.ryukoku.ac.jp/dreamspark/`