逆変換法による乱数生成 (2)

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L11(2013-06-26 Wed)

今日の目標

1. 指定された $p_2(q)$ に従う Q を, 適切な $g(y)$ を見つけて $[0,1)$ 一様分布の Y から, $q = g(y)$ で作れる.
2. この $g(y)$ の求め方でいいことを説明できる.

`http://hig3.net`

ここまで来たよ

Quiz 解答:確率密度関数の変換

1. $p_2(q)\mathrm{d}q = p_1(r)\mathrm{d}r$ より, 求める確率は,

$$\int_{0.3}^{1.0} p_2(q)\mathrm{d}q = \int_{g^{-1}(0.3)}^{g^{-1}(1.0)} p_1(r)\ \mathrm{d}r = \int_{0.09}^{0.25} 1\ \mathrm{d}r = 0.16.$$

2. $p_2(q)\mathrm{d}q = p_1(r)\mathrm{d}r$ より,

$$\begin{aligned} p_2(q) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}(r)} p_1(r) =& \frac{1}{r^{-1/2}} \times \begin{cases} 1 & (0 \le r < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \\ =& \frac{1}{2} q \times \begin{cases} 1 & (0 \le q < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \end{aligned}$$

Quiz 解答:確率変数の変換

1. $p_1(r) = \begin{cases} 1 & (0 \leq r < 1) \\ 0 & (他) \end{cases}$ なので,

$$\int_2^\infty p_2(q)\, \mathrm{d}q = \int_{\log 2}^\infty p_1(r)\, \mathrm{d}r = \int_{\log 2}^1 1\, \mathrm{d}r + \int_1^\infty 0\, \mathrm{d}r = 1 - \log 2.$$

2.

$$p_2(q) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}(r)} p_1(r) = \mathrm{e}^{-r} \times p_1(r) = \frac{1}{q} \times \begin{cases} 1 & (1 \leq q < \mathrm{e}) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

この $p_2(q)$ を使うと, 確率は $\displaystyle\int_2^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}q}{q} = [\log|q|]_2^{\mathrm{e}}$ からも求まる.

Quiz(逆変換法)

確率密度関数

$$p(r) = \begin{cases} 3 & (0 \le r < 1/4) \\ 1 & (1/2 \le r < 3/4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う乱数 R を, $[0,1)$ 一様乱数 Y から作りたい. getrandom に出てくる $g(y)$ のグラフは次のうちどんな形?

Quiz 解答:逆変換法

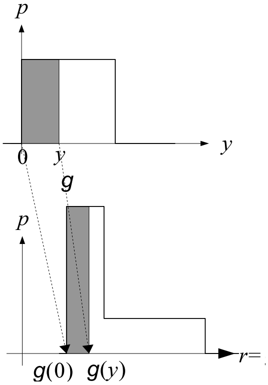
$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}y & (0 \le y < \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{1}(y-1) + \frac{3}{4} & (\frac{3}{4} \le y < 1) \end{cases}$$

ここまで来たよ

1. 逆変換法
   - Quiz 解説
2. 逆変換法による乱数生成 (2)
   - 復習:getrandom との関係
   - 累積分布関数

種明かし

getrandom で $[0,1)$ 一様乱数 y から別の乱数 q を生成するのは, 実はこれ利用してた.
うまい $p_2(q)$ になるように, $q = g(y)$ 定めてた.



$$p_1(y) = \begin{cases} 1 & (0 \le y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$q = g(y) = Ay + B.$$

$$p_2(q) = \begin{cases} 1/A & (B \le q < A + B) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

逆変換法

p_2 から g を求めよう!
確率密度関数 $p_2(q)$ に従う確率変数 Q が, $[0,1)$ 一様分布 $p_1(y)$ に従う確率変数 Y から, $q = g(y)$ で作れるとする. $g(y)$ はどんな関数?

$$\begin{aligned} p_2(q)\,\mathrm{d}q =& p_1(y)\,\mathrm{d}y \\ p_2(q) =& \frac{1}{\frac{dg}{\mathrm{d}y}(y)} \times p_1(y) \\ p_2(q) =& \frac{\mathrm{d}g^{-1}}{\mathrm{d}q}(q) \times 1 \quad (0 \le y < 1) \end{aligned}$$

両辺 q で積分. $g(y)$ の逆関数を $g^{-1}(q)$ とすると

$$\int_{-\infty}^{q} p_2(q_1)\mathrm{d}q_1 = g^{-1}(q) + C$$

$q_{\mathsf{min}} = (p_2(q) > 0$ な q の下限) とすると, 積分定数 C は, $g(0) = q_{\mathsf{min}}$, $g^{-1}(q_{\mathsf{min}}) = 0$ で決まる.

ここまで来たよ

1. 逆変換法
   - Quiz 解説
2. 逆変換法による乱数生成 (2)
   - 復習:getrandom との関係
   - 累積分布関数

確率密度関数と累積分布関数

要するに, $\boxed{}$ $F(q)=\int_{-\infty}^{q} p_2(q_1)\,\mathrm{d}q_1$ を計算すると,
その逆関数が, 求めたい $g(y)$ になってる!

$F(q)$ の意味

$\boxed{}$

Quiz(累積分布関数)

確率密度関数 $p(q)$ を積分した累積分布関数 $F(q) = \int_{-\infty}^{q} p(q_1)\,\mathrm{d}q_1$ について, **正しくない**のはどれ?

1. $F(q)$ は連続である
2. $F(q)$ は非減少 (=広義単調増加) 関数である
3. $F(q)$ の定義域は $[0, 1)$ である.
4. $F(q)$ の値域は $[0, 1]$ である.
5. $F(q)$ は停留点を持つことがある.
6. $F(q)$ は変曲点を持つことがある.

増減表

q	$-\infty$	q_{min}		$+\infty$
$p_2(q) = F'(q)$	$\to 0$	0	≥ 0	$\to 0$
$F(q)$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$

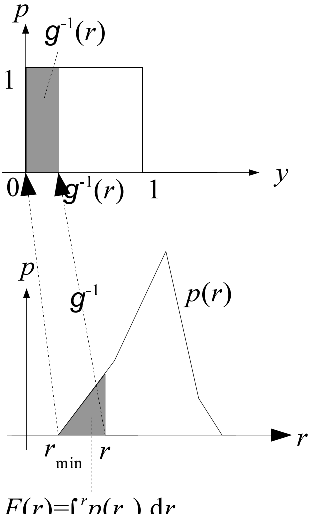
ちょっと記号の変更, $q \to r$, $p_2(q) \to p(r)$.

逆変換法

$p(r)$ に従う乱数を, $r = g(y)$ で $[0, 1)$ 一様乱数 y から作るには, $g(y)$ を次の様に決めればいい.

1. R の累積分布関数 $F(r) = \displaystyle\int_{-\infty}^{r} p(r_1)\,\mathrm{d}r_1$ を計算する.
2. $y = F(r)$ を解いて, 逆関数 $r = F^{-1}(y) = g(y)$ を求める.

理由の説明その 2



y	0	確率 $g^{-1}(r)$	$g^{-1}(r)$	$\cdots$
		$\downarrow_g \uparrow^{g^{-1}}$		
r	r_{min}	$\int_{-\infty}^{r} p_2(r_1)\ \mathrm{d}r_1$	r	$\cdots$

Quiz(逆変換法)

確率密度関数

$$p(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}r & (0 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う乱数 R を, $[0, 1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

Quiz(逆変換法)

確率密度関数

$$p(r) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{r} & (0 \leq r < 2) \\ 0 & (他) \end{cases}$$

に従う乱数 R を, $[0, 1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

Quiz(逆変換法)

確率密度関数

$$p(r) = \begin{cases} 3 & (0 \leq r < \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{8} & (2 \leq r < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う乱数 R を, $[0, 1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい.

1. 累積分布関数 $F(r)$ を求めよう.
2. (F が単調な各区間で) 逆関数 $F^{-1}(y)$ とその定義域を求めよう.
3. $g(y)$ を求めよう.

予習復習問題これからは毎週

- 金 11:05 締切の予習復習問題は RaMMoodle `http://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle` → 計算科学 II(講義) でやってね.
- 水 13:35 締切の予習復習問題は RaMMoodle `http://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle` → 計算科学演習 II でやってね.
- RaMMoodle にはスマートフォンからもアクセスできます. `http://hig3.net` > Links > RaMMoodle.

自宅で演習の課題をやろう

Visual Studio には Express Edition という '無料版' があります. 数理情報学科の学生は DreamSpark 経由で Visual Studio 製品を自宅で使えます.
`https://www.a.math.ryukoku.ac.jp/dreamspark/`

演習の休講/補講計画

2013-07-26 金 2 を予備日 (休講の有力候補), 2013-07-05 金 3(ここは休講する総合演習の裏) に補講の予定.