計算科学☆実習 B 初夏のプチテスト (筆記)

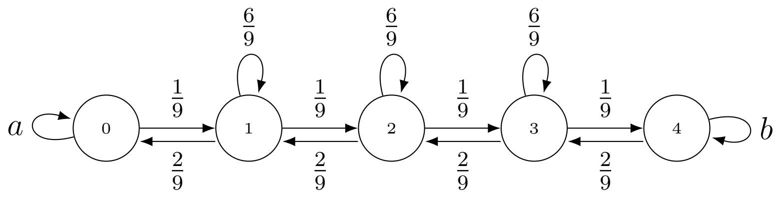
樋口さぶろお[1] 配布: 2018-06-05 Tue 更新: Time-stamp: "2018-06-07 Thu 08:58 JST hig"

初夏のプチテスト (筆記) 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

次の推移図をもつ, 状態空間 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ のマルコフ連鎖を考える.



1. 推移図中の確率 a, b を求めよう.
2. 時刻 t に状態が x である確率を $p(x, t)$ とする. $x = 1, 2, 3$ に対して, $p(x, t)$ の満たす漸化式を求めよう ($p(x, t)$ を $p(\bullet, t-1)$ で表そう).

---

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

2

過程不要

1 次元の空間 $\{x\} = \{0, 1, 2, 3\}$ 上のランダムウォークの座標 $X(t)$ が, 次の漸化式と初期条件で定まる.

$$\begin{aligned} X(t) =& X(t-1) + R(t), \quad (t = 1, 2, \ldots) \\ P(X(0) = 2) =& 1 \end{aligned}$$

ここで, $R(t)$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ は独立同分布

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} \frac{1}{8} & (r = -1) \\ \frac{5}{8} & (r = 0) \\ \frac{2}{8} & (r = +1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう確率変数である. ただし, 空間の両端がつながった周期的境界条件で考える. つまり, $x = 3 + 1$ は $x = 0$ と同じ状態, $x = 0 - 1$ は $x = 3$ と同じ状態と考える.

1. マルコフ連鎖の (授業で定義した) 転置推移確率行列 M を書こう.
2. 時刻 $t = 0$ の分布 $\vec{p}(0)$ を書こう.

3

時刻, 座標がともに整数値をとるランダムウォークを考える. 時刻 t に座標 x にウォーカーがいる確率を $p(x, t)$ とするとき, 次が成立する.

$$\begin{aligned} p(x,t) =& \frac{1}{7}p(x-1, t-1) + \frac{2}{7}p(x, t-1) + \frac{4}{7}p(x+1, t-1), \quad (t = 3, 4, \ldots) \\ p(x, 2) =& \begin{cases} 1 & (x = 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \end{aligned}$$

1. ウォーカーが, 時刻 $t-1$ に x にいたという前提のもとで, 時刻 t に $x+1$ にいる確率を求めよう.
2. ウォーカーが, 時刻 t に x にいたという前提のもとで, 時刻 $t+1$ に $x-1$ にいる確率を求めよう.
3. $p(2, 4)$ を求めよう.

4

$\boxed{\textbf{過程不要}}$

確率変数 $R \sim \mathrm{U}(-3,2)$ を考える. すなわち, 確率密度関数は次で与えられる.

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{5} & (-3 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

R に対応する疑似乱数を返す関数 `double getrandom(double y)` を書こう. ただし, y としては $[0,1)$ 一様擬似乱数を代入する.

5

次の転置推移確率行列 M をもつ, 状態空間 $S=\{0,1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 時刻 t の分布を $\vec{p}(t)$ とする. $M = \frac{1}{10}\left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ とする. ただし, M の固有値は $\lambda = 1, \frac{1}{10}$, 対応する固有ベクトルは $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) s, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) s$ $(s \neq 0)$ であることを使ってよい.

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. $\vec{p}(0) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ のとき, $\vec{p}(t)$ $(t \geq 0)$ を求めよう.
3. $\vec{p}(0) = \frac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ のとき, 極限分布 $\lim_{t\to+\infty} \vec{p}(t)$ を求めよう.

6

次の転置推移確率行列 M をもつ, 状態空間 $S=\{x\}=\{0,1,2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ただし, M の固有値は $\lambda = 1, 1, \frac{1}{6}$, 対応する固有ベクトルは $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) s, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) s, \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) s$ $(s \neq 0)$ であることを使ってよい.

時間 t において, マルコフ連鎖の定める分布にしたがう確率変数 $X(t)$ とする.

1. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{6}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ とする. 母期待値 $\mathrm{E}[\cos(X(0)\cdot\pi)]$ を求めよう.
2. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{6}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ とする. 母比率 $P(X(1)=2)$ を求めよう.

7

n　　　状態空間を $S=\{x\}=\{0,1,2,3,4\}$ とするマルコフ過程を考える. 時刻 t の分布を $\vec{p}(t)$ とする.

1. 時刻 $t=0$ の分布が $\vec{p}(0)=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\4\end{pmatrix}$ のとき, 母期待値 $\mathrm{E}[X(0)^2]$ を求めよう.
2. $X(0)$ のサイズ 5 の標本を抽出して

   $$1,1,2,2,4$$

   を得た. 母期待値 $\mathrm{E}[X(0)^2]$ を推定しよう.

8

次のプログラムで, seed を無作為に入力する.

```
double getuniform(){
  /* 略. rand() を定数倍して[0,1)一様乱数を返す. 授業と同じもの */
}

int getrandom(double y){
  if( y<1/7.0 ){
    return 0;
  }else if( y<3/7.0 ){
    return 1;
  }else{
    return 2;
  }
}

int main(){
  int seed;
  int x[4]
  scanf("%d",&seed);

  srand(seed);
  x[0]=getrandom(getuniform());
  x[1]=getrandom(getuniform());
  srand(seed);
  x[2]=getrandom(getuniform());
  x[3]=getrandom(getuniform());

  if( x[1]!=x[3] ){
    printf("A\n");
  }
  if( x[2]!=x[3] ){
    printf("B\n");
  }
  return 0;
}
```

1. A が出力される (B はどうでもいい) 確率を理由とともに答えよう
2. B が出力される (A はどうでもいい) 確率を理由とともに答えよう

9

過程不要

次のプログラムは, $t=0$ に $x=2$ を出発するランダムウォークが, ランダムウォークで, $0 \le t \le$ `tmax` に, 範囲 $0 \le x \le 4$ にとどまる母比率 p を, 点推定, および, 信頼係数 0.95 で区間推定するためのものである.

空欄 A–F を埋めよう. A–E は 1 行で. F は複数行も可.

```
/* include など略 */
#define TMAX 100

double getuniform();      /* 下では定義省略  */
int getrandom(double y); /* 下では定義省略  */
int phi(int path[],int tend);

int main(){
  int t,tmax,  n,nmax, x, seed;
  int path[TMAX];
  int count=0;

  scanf("%d",&seed);
  scanf("%d",&tmax);
  scanf("%d",&nmax);
  printf("#d=%d\n#T=%d\n#N=%d\n",seed,tmax,nmax);

  [A];
  for(n=0;n<nmax;n++){
    [B];
    t=0;
    path[t]=x;
    for([C]){
      x=x+getrandom(getuniform());
      path[t]=x;
    }
    count+=phi(path,tmax);
  }
  p=[D];
  printf("#点推定 %f\n",p);
  printf("#区間推定 区間の上端=%f\n",[E];);
  printf("#区間推定 区間の下端=%f\n",[回答不要];);
  return 0;
}

/* path[0],path[1],..,path[tend] が
0≤t≤ tend に0≤x≤4 にとどまるなら1, そうでないなら0を返す. */
int phi(int path[], int tend){
  int t;
  [F]
}
```

10

t を時間, x を位置とするとき拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 5 \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

を考える.

1. $u(x,t) = \mathrm{e}^{-20t}\cos(2x)$ はこの拡散方程式を満たすかどうか, 理由とともに答えよう.
2. $u(x,t) = \mathrm{e}^{-2t}\sin(5x)$ はこの拡散方程式を満たすかどうか, 理由とともに答えよう.

計算科学☆実習 B 初夏のプチテスト (筆記) 略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2018-06-05 Tue 更新: Time-stamp: "2018-06-07 Thu 08:58 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. プチテストで, 受講者はすべての過程を記す必要があります.

配点

1

1. 確率の合計が 1 であることから, 状態 $x = 0$, 状態 $x = 4$ から出る矢印の確率の合計が 1 になるようにして $a = \frac{8}{9}$, $b = \frac{7}{9}$.
2. 例えば $x = 1$ に入る矢印に注目して,

$$p(x,t) = \tfrac{1}{9}p(x-1,t-1) + \tfrac{6}{9}p(x,t-1), + \tfrac{2}{9}p(x+1,t-1).$$

配点 1:各 2 点, 2:6 点, 計 10 点

2

1.

$$M = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & 1 & & 2 \\ 2 & 5 & 1 & \\ & 2 & 5 & 1 \\ 1 & & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. $\vec{p}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

配点 1:6 点, 2:4 点, 計 10 点

講評 $\vec{p}(0)$ と言っているのですから, 分布をベクトルとして答えてください. 成分番号 x が 1 からでなく 0 から始まることに注意.

$\vec{p}(0) = \boxed{x \text{ による場合分けの式}}$ みたいな答っておかしいですよね? 左辺はベクトル右辺はスカラー, 右辺は x の関数だけど左辺は x によってない.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

1. $x \to x+1$ とすると,

$$p(x+1,t) = \frac{1}{7}p(x,t-1) + \frac{2}{7}p(x+1,t-1) + \frac{4}{7}p(x+2,t-1).$$

右辺で, $p(x,t-1)=1, p(\text{他},t-1)=0$ とすると, $p(x+1,t)=\frac{1}{7}$.

2. t もずらして考えると同様に, $\frac{4}{7}$.
3. $t=4$ に $x=2$ に到達するには, $3\to 2\to 2$ または, $3\to 3\to 2$. よって, 確率は, $\frac{4}{7}\times\frac{2}{7}\times 2=\frac{16}{49}$.

配点　1,2:3 点, 3:4 点, 計 10 点

4

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=5.0*y-3.0;
  return r;
}
```

配点　10 点

講評　y の範囲で if 文による場合分けをしてた人もいましたが, やるとすれば, $0 \le y < 1$ が成立していなかったらエラーを返す, です. 0 を返したりすると, $P(R=0)$ が指定よりも大きくなります. この授業では, エラー処理はしなくていいことにしているので, $0 \le y < 1$ という条件は書かなくてもかまいません.

5

1. 定常分布は, 固有値 1 の固有ベクトルを定数倍して確率ベクトルにしたものなので, $\frac{1}{9}\binom{4}{5}$.
2. $$\vec{p}(t) = a_1\cdot\binom{4}{5}1^t + a_2\cdot\binom{1}{-1}\left(\frac{1}{10}\right)^t$$

である. $\vec{p}(0)=\binom{5}{4}$ より, a_1, a_2 を定めて,

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{9}\binom{4}{5} + \frac{1}{9}\binom{1}{-1}\left(\frac{1}{10}\right)^t$$

3. 上の結果で $t\to+\infty$ とすると, 定常状態 $\frac{1}{9}\binom{4}{5}$ に収束する.

配点　1:2 点, 2:6 点, 3:2 点, 計 10 点

6

1. $\frac{3}{6}\cos 0+\frac{2}{6}\cos\pi+\frac{1}{6}\cos 2\pi=\frac{1}{3}$.
2. $\vec{p}(1)=M\vec{p}(0)=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}18\\8\\10\end{pmatrix}$. $P(X(1)=2)=\frac{5}{18}$.

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点.

講評　確率変数 X と, X の分布 $f(x)=P(X=x)$ とを区別しましょう. 確率変数と確率を区別しましょう. いまの場合 $X(t)$ は整数値 $x=0,1,2$ をとります.

2. では, 固有値固有ベクトルを使って $\vec{p}(1)$ を作ることもできますが, $M\vec{p}(0)$ で求めるほうが楽です.

7

n

1. 母期待値は, $\frac{1}{10}\cdot 0^2+\frac{1}{10}\cdot 1^2+\frac{2}{10}\cdot 2^2+\frac{2}{10}\cdot 3^2+\frac{4}{10}\cdot 4^2=\frac{91}{10}$
2. 標本期待値は $\frac{1}{5}[1^2+1^2+2^2+2^2+4^2]=\frac{26}{5}$. よって, $\frac{26}{5}$ と推定する.

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点.

8

1. x[1],x[3] はともに, '乱数表' でヘッドを seed の位置にセットした後, 1 行だけ進んだところにある値なので, 互いに等しい. よって確率は 0.
2. 同じ値が続けて出ない確率なので, $1-(\frac{1}{7})^2-(\frac{2}{7})^2-(\frac{4}{7})^2=\frac{7^2-21}{7^2}=\frac{4}{7}$.

配点　1,2:各 5 点, 計 10 点.

9

A `srand(seed)`

B `x=2`

C `t=1;t<=tmax;t++`

D `(double)count/nmax`

E `p+1.96*sqrt(p*(1-p)/nmax)`

F `for(t=0;t<=tend;t++){ if(path[t]<0 || path[t]>4){ return 0;} } return 1;`

10

1. 左辺 $=-20u(x,t)$, 右辺 $=5\times(-1)\times 2^2u(x,t)$ より満たす.
2. 左辺 $=-2u(x,t)$, 右辺 $=5\times(-1)\times 5^2u(x,t)$ より満たさない.